Asservissement : la transformée de Laplace

* Définit

le passage de :

temporel $\longrightarrow$ complexe

$x(t) \longrightarrow X(p)$

$$\boxed{X(p) = L(x(t)) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, dt}$$

* Propriétés

- Dériva : $\Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{\Omega(p) = p.\theta(p)}$
- integra : $\theta(t) = \int \Omega(t)\,dt \Rightarrow \boxed{\theta(p) = \frac{1}{p}\,\Omega(p)}$
- théorème de la valeur finale

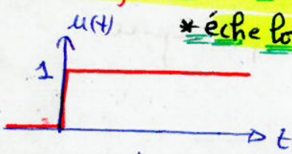
$$\lim_{t\to+\infty} x(t) \Rightarrow \boxed{\lim_{p\to 0} p.X(p)}$$

- théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t\to 0} x(t) \Rightarrow \boxed{\lim_{p\to+\infty} p.X(p)}$$

* Transformée de laplace usuelle

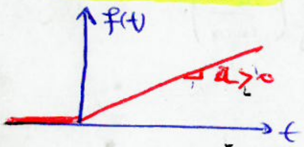
*échelon unité



$$\Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \Rightarrow u(t) = 1 \\ t < 0 \Rightarrow u(t) = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow \boxed{U(p) = \frac{1}{p}}$

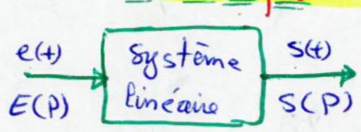
* rampe : $f(t)$



$\Rightarrow f(t) = a\,t.\,u(t)$

$\hookrightarrow \boxed{F(p) = \frac{a}{p^2}}$

* fonction de transfert



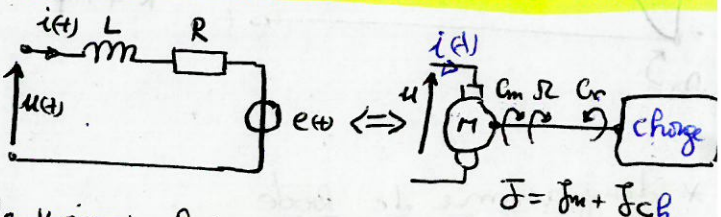
un système est linéaire s'il est représenté par une équat différentielle :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

$m < n$

$$\Rightarrow \boxed{H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n}} \Leftarrow \text{fonct de transfert}$$

Application : machine à courant continu



les 4 éq de la MCC :

- $u(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + e(t)$ • $e(t) = K\Omega(t)$
- $J\frac{d\Omega}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f\Omega(t)$ • $C_m(t) = K\,i(t)$

*** la transformée de laplace**

- $U(p) = L.p.I(p) + R\,I(p) + E(p)$ • $E(p) = K\,\Omega(p)$
- $J.p.\Omega(p) = C_m(p) - C_r(p) - f\Omega(p)$ • $C_m(p) = K\,I(p)$

*** fonct de transfert si $C_r = 0$**

on : $\hookrightarrow H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$

$$Jp\Omega(p) + f\Omega(p) = C_m(p) = K\,I(p)$$

$$\Leftrightarrow \Omega(p)[Jp + f] = K\,I(p) \quad (1)$$

et que : $I(p)(L.p + R) = U(p) - E(p)$

$$\hookrightarrow I(p) = \frac{U(p)}{Lp+R} - \frac{E(p)}{Lp+R}$$

$$\Leftrightarrow I(p) = \frac{U(p)}{Lp+R} - \frac{K\,\Omega(p)}{Lp+R} \quad (2)$$

(1) et (2)

$$\Rightarrow \Omega(p)\left[J.p + f + \frac{K^2}{Lp+R}\right] = \frac{U(p)\,K}{Lp+R}$$

finalement :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{K^2 + Rf + (RJ + Lf)p + LJp^2}}$$

on cherche la sortie $\Omega(p)$ si $U(t)$ est un échelon

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} \Rightarrow U(p) = \frac{U_0}{p}$$

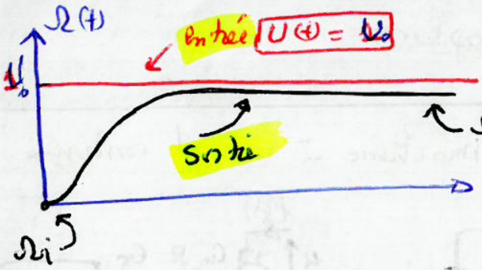
$$\Rightarrow \boxed{\Omega(p) = \frac{U_0}{p} \times \frac{K}{K^2 + Rf + (RJ + Lf)p + LJp^2}}$$

- la valeur finale

$$\Omega_f = \lim_{p\to 0} p.\Omega(p) \Rightarrow \boxed{\Omega_f = \frac{K.U_0}{K^2 + Rf}}$$

- la valeur initiale

$$\Omega_i = \lim_{p\to+\infty} p.\Omega(p) \Rightarrow \boxed{\Omega_i = 0}$$



$$\Omega_f = \frac{K U_0}{K^2 + Rf}$$

* diagramme de Bode

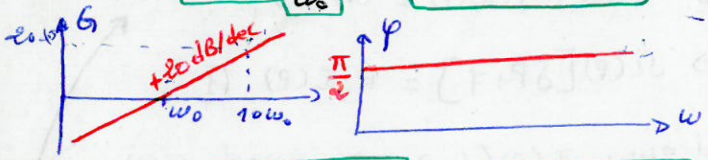
$$H(p) \xrightarrow{p \to j\omega} H(j\omega)$$

- il s'agit de la représentation de

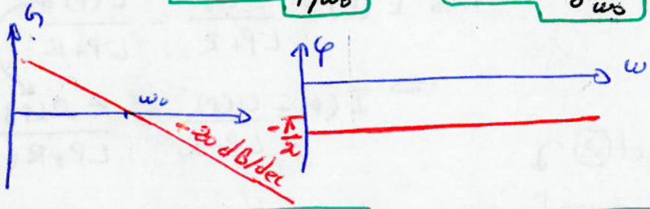
$$\begin{cases} \boxed{G(j\omega) = 20 \log_{10}(|H(j\omega)|)} \\ \boxed{\varphi(j\omega) = \mathrm{Arg}(H(j\omega))} \end{cases}$$

- Pour tracer les diagrammes de Bode on se basant de :

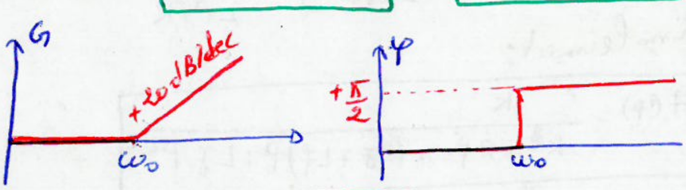
forme ① : $\boxed{H(p) = \frac{p}{\omega_0}} \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}}$



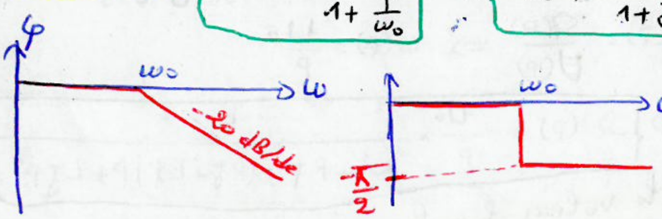
forme ② : $\boxed{H(p) = \frac{1}{p/\omega_0}} \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}}$



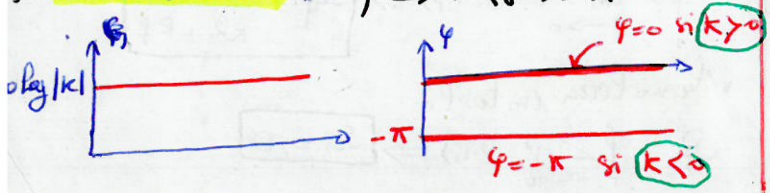
forme ③ : $\boxed{H(p) = 1 + \frac{p}{\omega_0}} \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$



forme ④ : $\boxed{H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_0}}} \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$



forme 5 : $H(p) = K$, $\Rightarrow H(j\omega) = K$



Ex : machine à courant continu

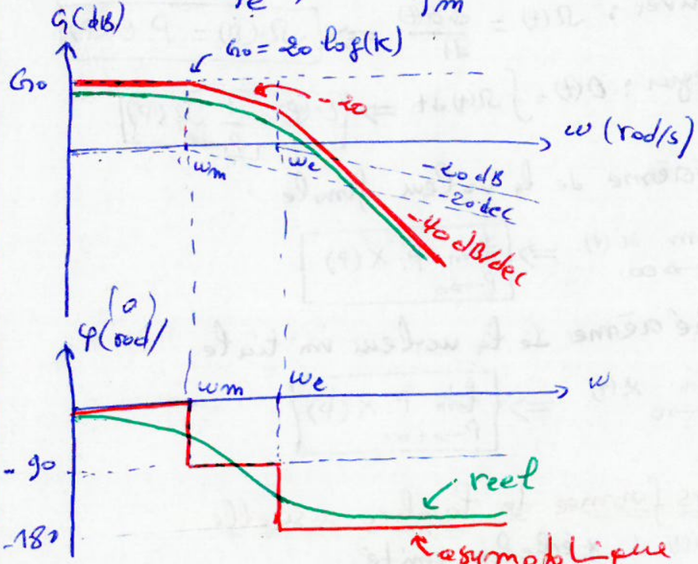
$$H(p) = \frac{K}{(1 + T_e p)(1 + T_m p)} \quad \text{avec } K > 0$$

$\hookrightarrow T_m \gg T_e$ (s)

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{(1 + T_e j\omega)(1 + T_m j\omega)}$$

$$= \frac{K}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_e}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_m}\right)}$$

avec $\omega_e = \frac{1}{T_e}$, $\omega_m = \frac{1}{T_m}$ et $\omega_m \ll \omega_e$



$$\begin{cases} |H| = \dfrac{K}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right]}} \\ \varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right) \end{cases}$$

Rappel :

$$\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^n \quad \text{ou} \quad \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^n$$

$$\text{Pente} = n \times 20$$

$$\varphi = n \times \frac{\pi}{2}$$

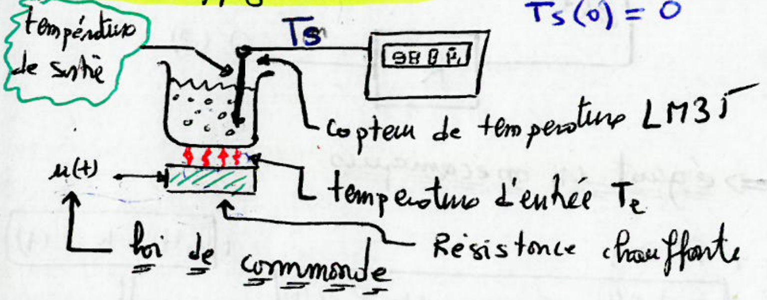
$$\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg(a) - \arg(b)$$

$$\arg(a \times b) = \arg(a) + \arg(b)$$

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a + b}{1 - ab}\right)$$

Asservissement : Notions de bases

EX : chauffage d'eau

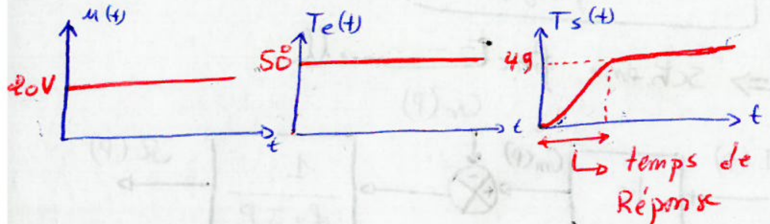


$T_s(0) = 0$

u(t) : regler la température d'entrée

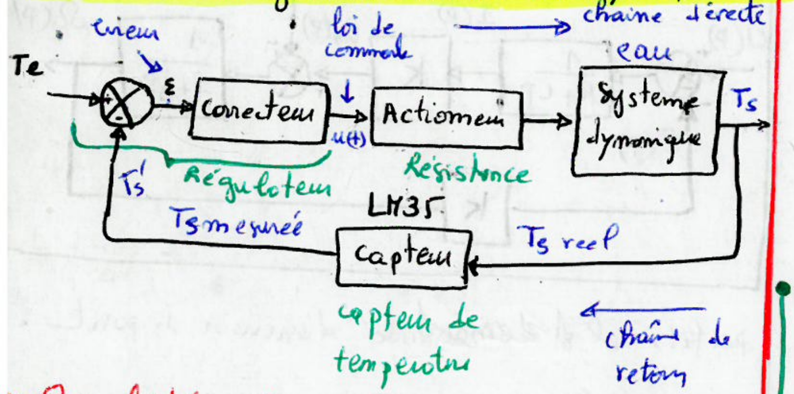
Te : la temperature d'entree désirée

Ts : la temperature d'eau ou temperature de sortie Ts



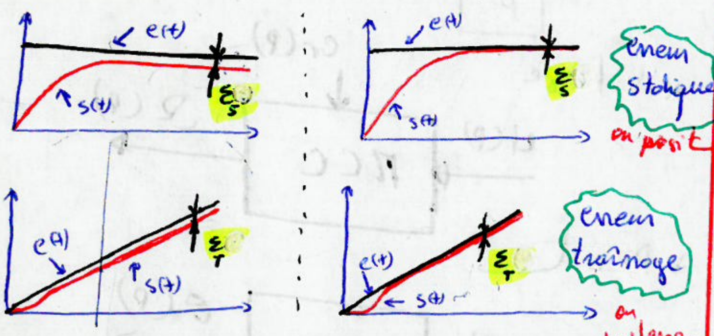
la sortie tend vers la valeur de consigne (Te) dans une durée de t_r : temps de réponse.

schema d'un système asservi : exemple précedent



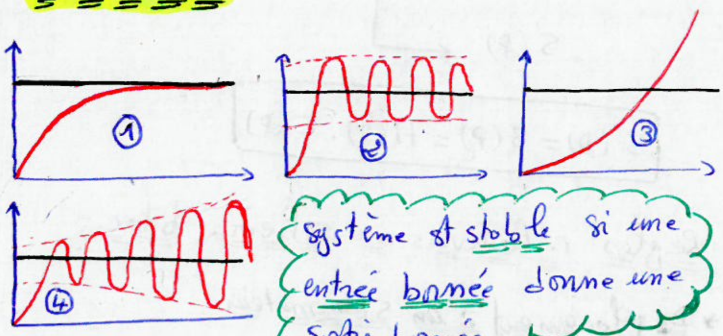
* Qualités d'un systeme asservi

* la précision : erreurs → tend vers 0



$\boxed{\varepsilon_s \neq 0}$, $\boxed{\varepsilon_T \neq 0}$ système non précis | $\boxed{\varepsilon_s = 0}$, $\boxed{\varepsilon_T = 0}$ système précis

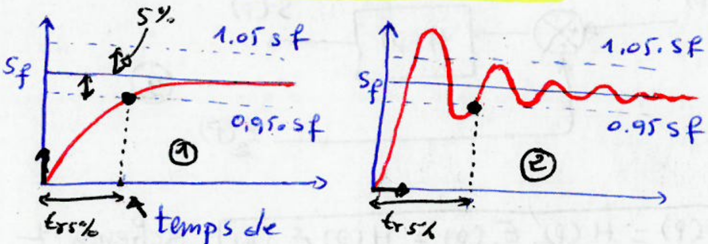
* la stabilité



système est stable si une entrée bornée donne une sortie bornée

1. systeme stable
2. systeme stable à la limite de stabilité
3. systeme instable.
4. système instable

* la rapidité : temps de réponse



temps de réponse

Régime non oscillant amorti | régime oscillant amorti

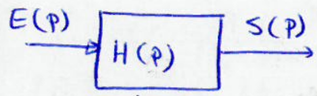
systeme 1 est rapide par rapport au systeme 2

dnc C/C : on cherche à avoir

- un système stable
- un systeme précis
- un systeme rapide

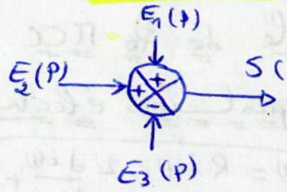
* Représentation fonctionnel d'un systeme asservi

* le bloc



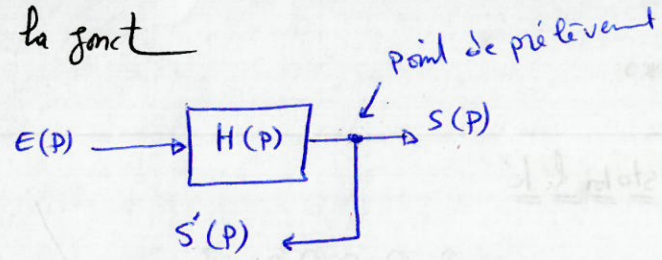
$$\boxed{S(P) = H(P) \cdot E(P)}$$

* le sommateur



$$\boxed{S(P) = E_1(P) + E_2(P) - E_3(P)}$$

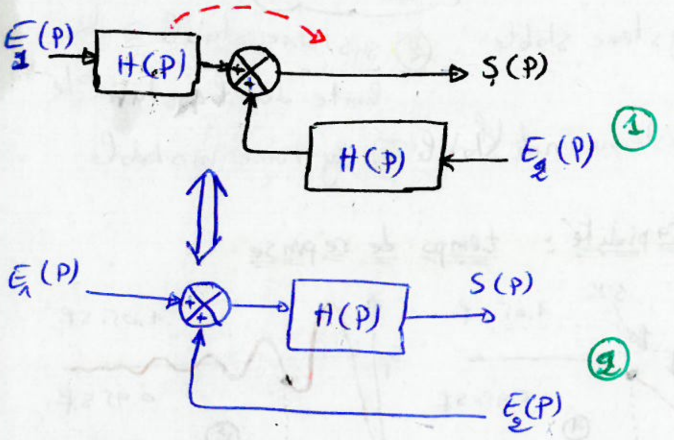
* la fonct



$$\boxed{S'(P) = S(P) = H(P) \cdot E(P)}$$

* Règles relatives au schéma bloc

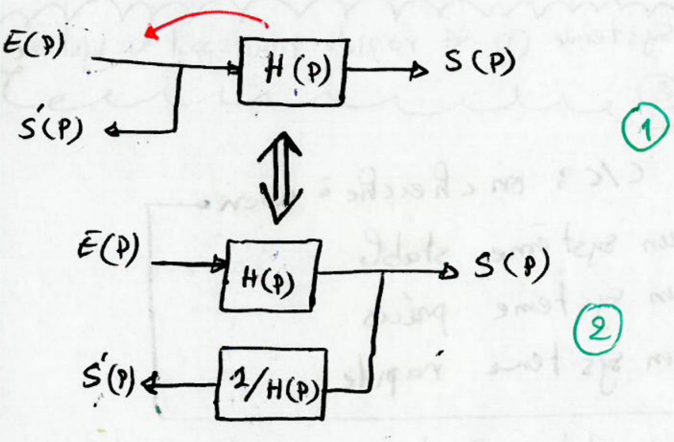
* Déplacement d'un sommateur



$$\boxed{S(P) = H(P) \cdot E_1(P) + H(P)\, E_2(P)}$$ schema 1

$$\boxed{S(P) = H(P)\left(E_1(P) + E_2(P)\right)}$$ schema 2

* Déplacement d'une fonct



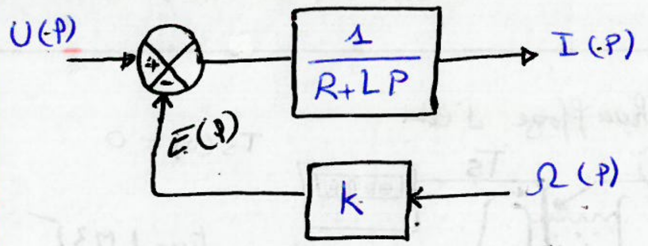
$$\underbrace{S'(P) = E(P)}_{\text{schema } 1} = \underbrace{H(P) \cdot \frac{1}{H(P)}}_{\text{schéma } 2} \cdot E(P)$$

* Modèle de la MCC

=> équations électriques

- $\boxed{u(t) = R\, i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)} \Rightarrow \boxed{I(P) = \frac{U(P) - E(P)}{R + LP}}$
- $\boxed{e(t) = K\, \Omega(t)} \Rightarrow \boxed{E(P) = K\, \Omega(P)}$

* Représentation fonctionnelle



=> équations mécaniques

+ PFD :

$$\boxed{J \frac{d\Omega(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f\, \Omega(t)}$$

$$\Downarrow$$

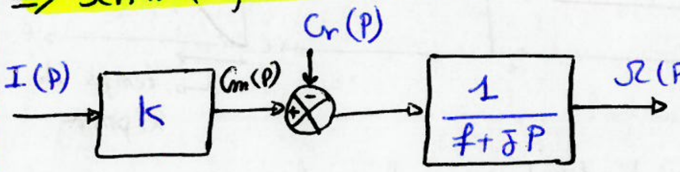
$$\boxed{\Omega(P) = \frac{C_m(P) - C_r(P)}{f + JP}}$$

+ $\boxed{C_m(t) = K\, i(t)}$

$$\Downarrow$$

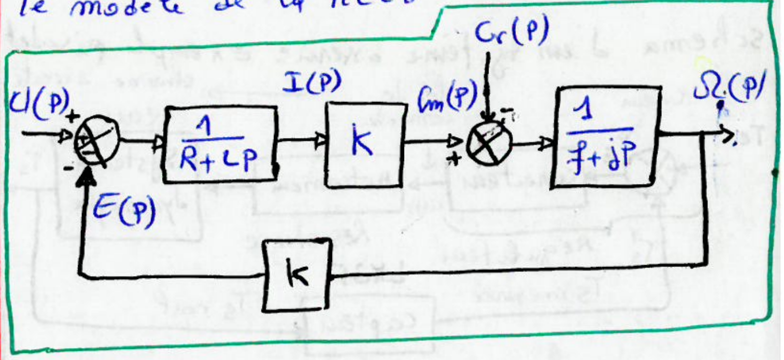
$$\boxed{C_m(P) = K\, I(P)}$$

=> schéma fonctionnelle



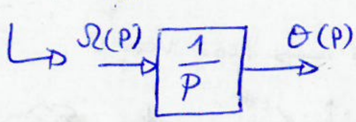
=> l'associat de deux schéma dm-

le modèle de la MCC :

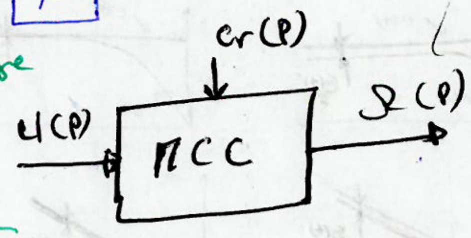


Parfois il est demandé d'asservir la posit :

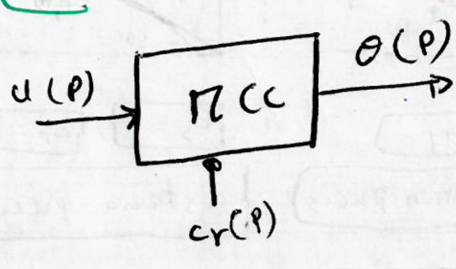
$$\Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow \Omega(P) = P \cdot \theta(P) \Rightarrow \theta(P) = \frac{1}{P}\, \Omega(P)$$



* vitesse

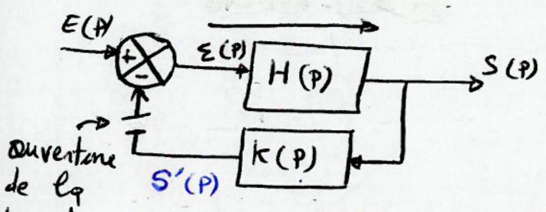


* posit



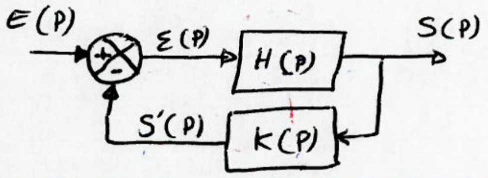
* Les fonctions de transfert d'un système asservi.

• fonction de transfert en boucle ouverte



$$H_{BO}(P) = \frac{S'(P)}{\varepsilon(P)} \Rightarrow \boxed{H_{BO}(P) = K(P).H(P)}$$

• fonction de transfert en boucle fermée



$$\boxed{H_{BF}(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{H(P)}{1+K(P).H(P)} = \frac{H(P)}{1+H_{BO}(P)}}$$

Démonstration :

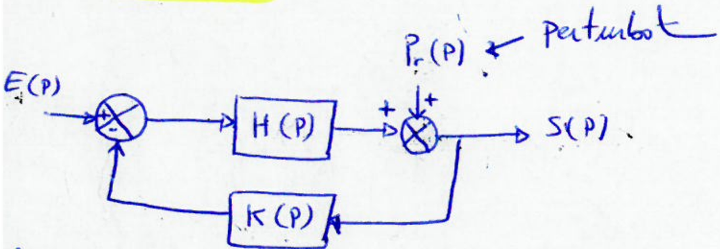
$$S(P) = H(P).\varepsilon(P) = H(P).\left(E(P) - S'(P)\right)$$

$$= H(P).\left(E(P) - K(P).S(P)\right)$$

$$\Leftrightarrow S(P)\left(1 + K(P).H(P)\right) = H(P).E(P)$$

$$\hookrightarrow \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{H(P)}{1+K(P).H(P)} = \frac{H(P)}{1+H_{BO}(P)} = H_{BF}(P)$$

* Propriétés d'un système bouclé ; Influence d'une perturbation



le système maintenant a deux entrée :

$E(P)$: entrée utile (consigne)

$P_r(P)$: entrée perturbateur (Perturbation).

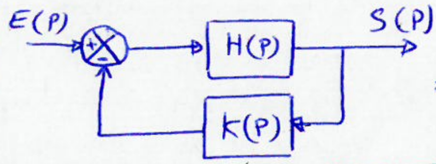
donc la fonction de Transfert s'écrit :

$$S(P) = F_1(P).E(P) + F_2(P).P_r(P)$$

donc :

$$F_1(P) = \left.\frac{S(P)}{E(P)}\right|_{P_r=0} \quad / \quad F_2(P) = \left.\frac{S(P)}{P_r(P)}\right|_{E=0}$$

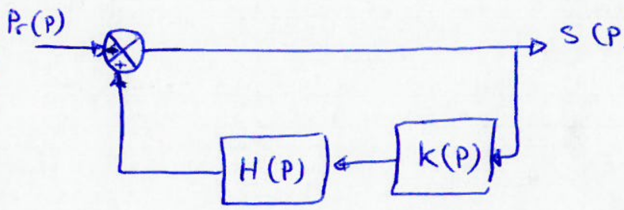
$F_1(P)$? $P_r = 0$



$$\Rightarrow \boxed{F_1(P) = \frac{H(P)}{1+K(P).H(P)}}$$

$$F_{BO}(P) = K(P).H(P) \Rightarrow \boxed{F_1(P) = \frac{H(P)}{1+F_{BO}(P)}}$$

$F_2(P)$? $E = 0$



$$F_2(P) = \frac{1}{1+\underbrace{K(P).H(P)}_{F_{BO}(P)}} = \frac{1}{1+F_{BO}(P)}$$

d'où,

$$\boxed{S(P) = \frac{H(P)}{1+F_{BO}(P)}E(P) + \frac{1}{1+F_{BO}(P)}.P_r(P)}$$

si $e(t)$ et $P_r(t)$ sont des échelons

$$\Rightarrow E(P) = \frac{E_0}{P} \quad , \quad P_r(P) = \frac{P_{r0}}{P}$$

$$S(P) = \frac{E_0}{P}\frac{H(P)}{1+F_{BO}(P)} + \frac{P_{r0}}{P}\frac{1}{1+F_{BO}(P)}$$

$\Rightarrow$ la valeur final de la sortie

$$S_f = \lim_{P \to 0} P.S(P) \Rightarrow$$

$$\boxed{S_f = E_0\frac{H(0)}{1+F_{BO}(0)} + P_{r0}\frac{1}{1+F_{BO}(0)}}$$

C/C : la perturbation influe moins sur la sortie.

si $P_r \nearrow \Longrightarrow S_f \nearrow$

système $1^{ère}$ ordre

*** Equat° différentielle**

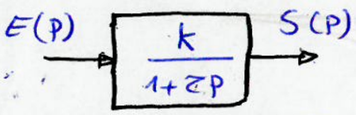
$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)}$$

*** fonct° de transfert**

$$H(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{K}{1+\tau P}$$

↳ K : gain statique
↳ τ : constante de temps

*** schéma bloc**



*** Réponse indicielle.**

$$e(t) = E_0 \cdot u(t) \Rightarrow E(P) = \frac{E_0}{P}$$

$$\Rightarrow S(P) = E(P) \cdot \frac{K}{1+\tau P} \Rightarrow \boxed{S(P) = \frac{E_0}{P} \frac{K}{1+\tau P}}$$

(!) d'après tableau des fonct°s de transfert

$$\boxed{s(t) = K E_0 (1 - e^{-t/\tau})}$$

*** Etude de la réponse indicielle.**

- la valeur finale

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{P \to 0} P \cdot S(P) \Rightarrow \lim_{P \to 0} P \cdot \frac{E_0}{P} \frac{K}{1+\tau P}$$

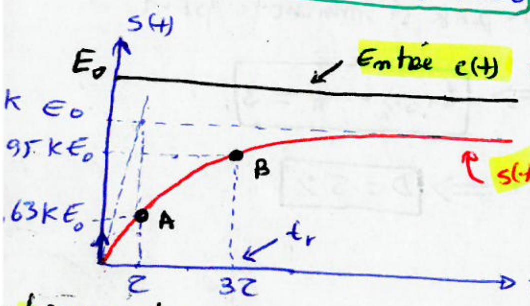
$$\boxed{S_f = K \cdot E_0} \quad \text{avec} \quad \boxed{K = \frac{S_\infty}{E_0}}$$

- la valeur initiale

$$\lim_{t \to 0} s(t) \Rightarrow \lim_{P \to +\infty} P \cdot S(P) \Rightarrow \boxed{S_i = 0}$$

les valeurs remarquables

- $t = \tau \Rightarrow \boxed{s(t) = 63\%\, K E_0}$
- $t = 3\tau \Rightarrow \boxed{s(t) = 95\%\, K E_0}$



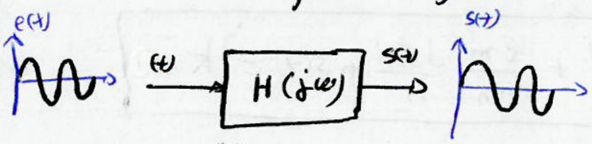
- démarrage à l'origine
- pente verticale

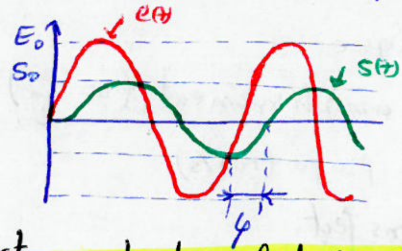
temps de réponse à 5% tr5%

$$s(t_r) = 0{,}95\, K E_0 = K E_0 (1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}})$$

$$\hookrightarrow e^{-t_r/\tau} = 0{,}05 \Rightarrow \boxed{t_{r5\%} = 3\tau}$$

*** Réponse harmonique ou fréquentielle**





$$e(t) = E_0 \sin(\omega t)$$
$$s(t) = S_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

*** fonct° de transfert complexe**

$$P = j\omega \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{K}{1+\tau j\omega}} \Rightarrow$$

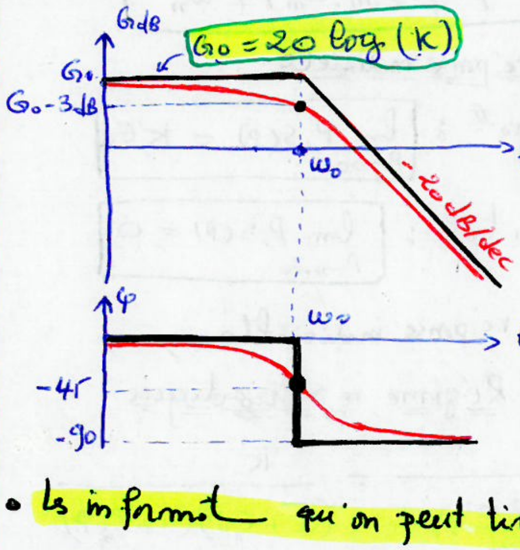
*** module et phase de $H(j\omega)$**

$$\boxed{|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}} , \boxed{\varphi(j\omega) = -\operatorname{arctg}(\tau\omega)}$$

*** Diagramme de Bode**

$$G_{dB} = 20 \log\left(\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}\right)$$

$$\boxed{G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log\left(\sqrt{1+(\tau\omega)^2}\right)}$$



$\boxed{\omega = \omega_0}$
↳ $\boxed{G = G_0 - 3dB}$

$\boxed{\omega = \omega_0}$
↳ $\boxed{\varphi = -45°}$

- **Les informat° qu'on peut tirer de D. Bode**
  - le gain statique : $\boxed{K = 10^{\frac{G_0}{20}}} \Leftarrow \omega = 0$
  - la constante de temps : $\boxed{\tau = \frac{1}{\omega_0}}$

système 2ème ordre

* équation de transfert $\frac{d^2x}{dt} \longrightarrow p^2 X(p)$

$$\boxed{\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_n}\frac{d s(t)}{dt} + s(t) = K e(t)}$$

K : gain statique
m : facteur d'amortissement (ou ξ)
ω_n : pulsation propre (rad/s)

* fonction de transfert

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K \cdot \omega_n^2}{p^2 + 2m\omega_n p + \omega_n^2}}$$

* schéma bloc

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2m\omega_n p + \omega_n^2}} \longrightarrow S(p)$$

* Réponse indicielle

$e(t) = E_0 \cdot u(t) \Longrightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$\Rightarrow \boxed{S(p) = \frac{E_0}{p}\,\frac{K \cdot \omega_n^2}{p^2 + 2m \cdot \omega_n p + \omega_n^2}}$$

* Etude de la réponse indicielle

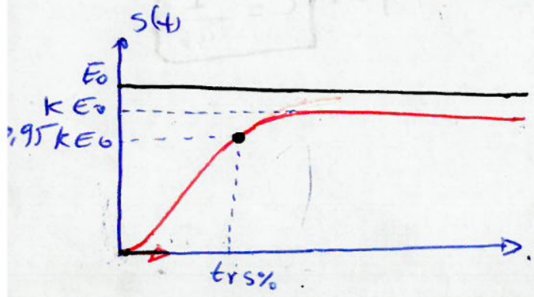
- la valeur finale : $\boxed{\lim_{p \to 0} p \cdot S(p) = K E_0}$
- la valeur initiale : $\boxed{\lim_{p \to +\infty} p \cdot S(p) = 0}$

* allure de la réponse indicielle

- Pour $m > 1$: Régime apériodique

$$H(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}p^2 + \frac{2m}{\omega_n}p + 1} = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

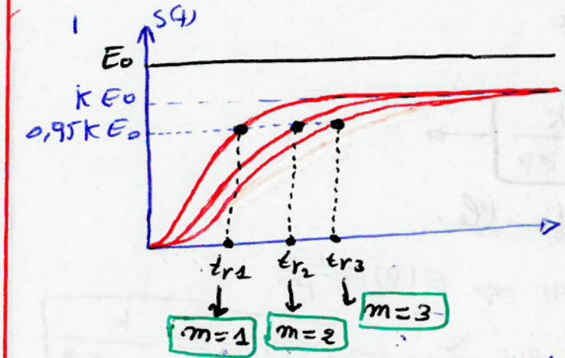
si $E(p) = \frac{E_0}{p} \Rightarrow \boxed{S(p) = \frac{E_0}{p}\,\frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}}$



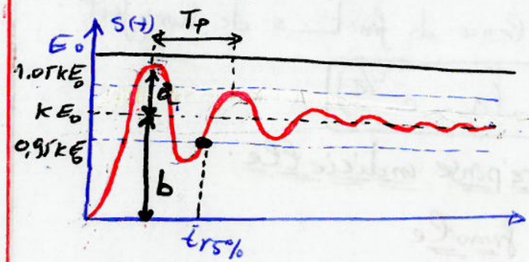
* pour $m = 1$: Régime apériodique critique

$$H(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}p^2 + \frac{2m}{\omega_n}p + 1} = \frac{K}{(1+\tau p)^2}$$

si $E(p) = \frac{E_0}{p} \Rightarrow \boxed{S(p) = \frac{E_0}{p}\,\frac{K}{(1+\tau p)^2}}$

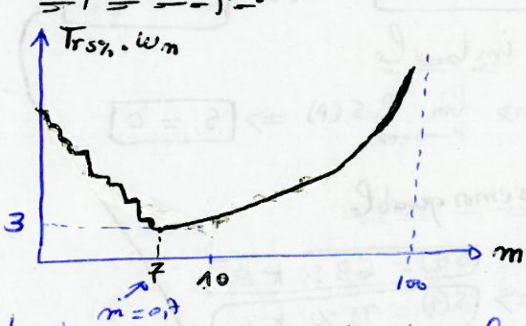


* Pour $m < 1$: régime oscillatoire amorti



- Dépassement : $\boxed{D\% = 100 \times \frac{a}{b}}$

- temps de réponse



le temps de réponse est minimal pour

$m = 0{,}7 \Rightarrow \boxed{tr_{5\%} \cdot \omega_n = 3}$

$\hookrightarrow m = 0{,}7 \Rightarrow \boxed{D = 5\%}$

* Réponse harmonique 2eme ordre

→ pour $m > 1$: deux solut réell

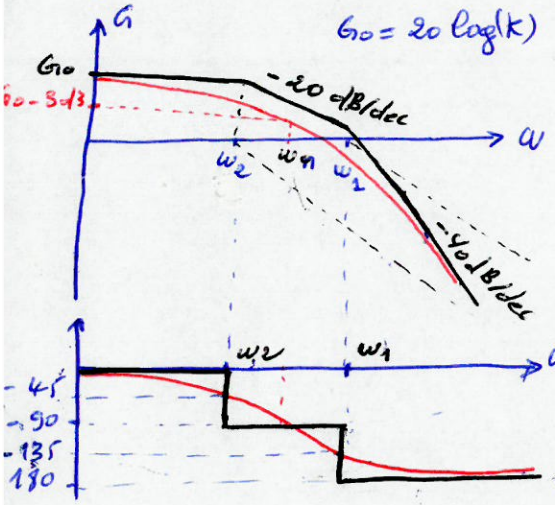
$$\begin{cases} \omega_1 = m\omega_n + \sqrt{m^2-1}\,.\omega_n = \dfrac{1}{\tau_1} \\ \omega_2 = m.\omega_n - \sqrt{m^2-1}\,.\omega_n = \dfrac{1}{\tau_2} \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \frac{k}{(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)} \quad \text{avec } \omega_1 > \omega_2$$

→ $$\boxed{|H(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(1+(\tau_1\omega)^2)(1+(\tau_2\omega)^2)}}}$$

→ $$\boxed{\varphi(H(j\omega)) = -\operatorname{artg}(\tau_1\omega) - \operatorname{artg}(\tau_2\omega)}$$

* Diagramme de Bode si $k>0$



C/C :

à $G_0 - 3\,dB \longrightarrow \omega = \omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$

à $\varphi = -45° \longrightarrow \omega = \omega_2 = \dfrac{1}{\tau_2}$

à $\varphi = -90° \longrightarrow \omega = \omega_n$

à $\varphi = -135° \longrightarrow \omega = \omega_1 = \dfrac{1}{\tau_1}$

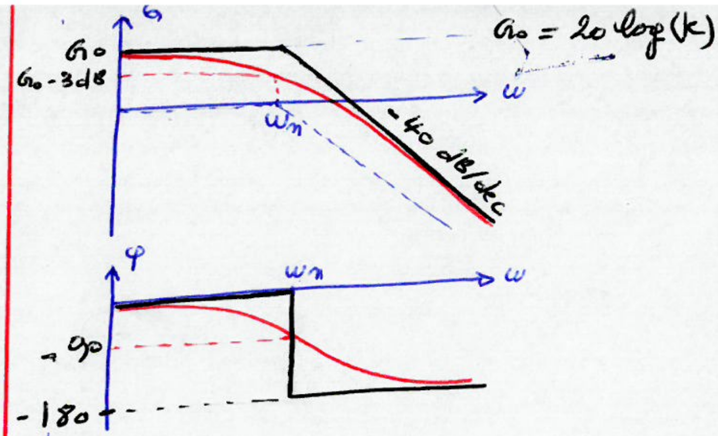
* pour $m = 1 \Rightarrow$ deux solut doubles

$$\omega_1 = \omega_2 = m\omega = \frac{1}{\tau} = \omega_0$$

$$H(j\omega) = \frac{k}{(1+j\tau\omega)^2}$$

→ $$|H(j\omega)| = \frac{k}{1+(\tau\omega)^2}$$

→ $$\varphi(H(j\omega)) = -2\arctan(\tau\omega)$$



C/C

- à $G_0 - 3\,dB \longrightarrow \omega = \omega_n = \dfrac{1}{\tau}$
- à $\varphi = -90 \longrightarrow \omega = \omega_n$

* pour $m < 1$: deux solut imaginaire

$$\begin{cases} \omega_1 = m.\omega_n + j\sqrt{1-m^2}\,\omega_n \\ \omega_2 = m\,\omega_n - j\sqrt{1-m^2}\,\omega_n \end{cases}$$

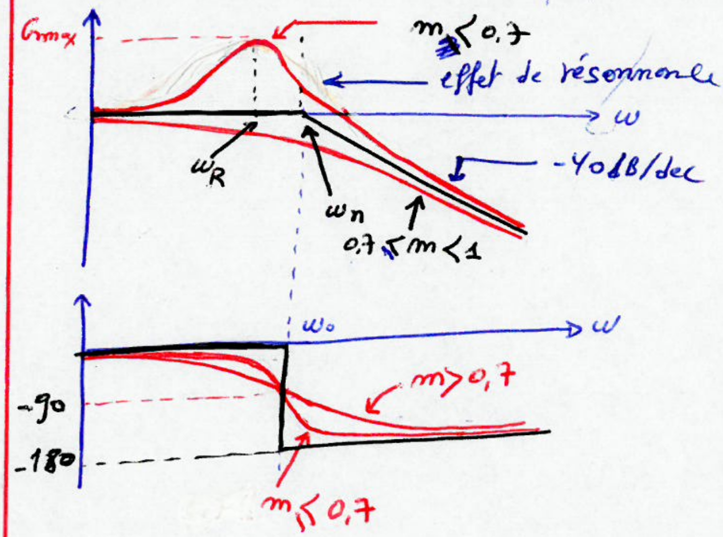
$$H(j\omega) = \frac{k}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_n} + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2mj\frac{\omega}{\omega_n}}$$

→ $$|H(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2m\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

→ $$\varphi(j\omega) = -\arctan\left(\frac{2m\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

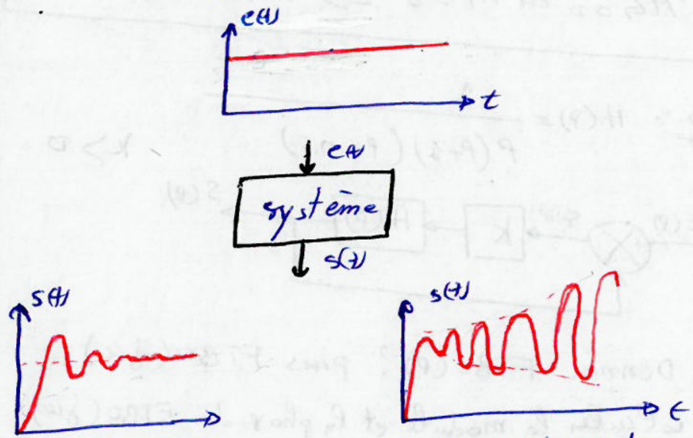
Pour $k = 1$



Asservissement : La stabilité des systèmes asservis

Déf :

un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.



comportement stable

comportement instable

*** Condit de stabilité**

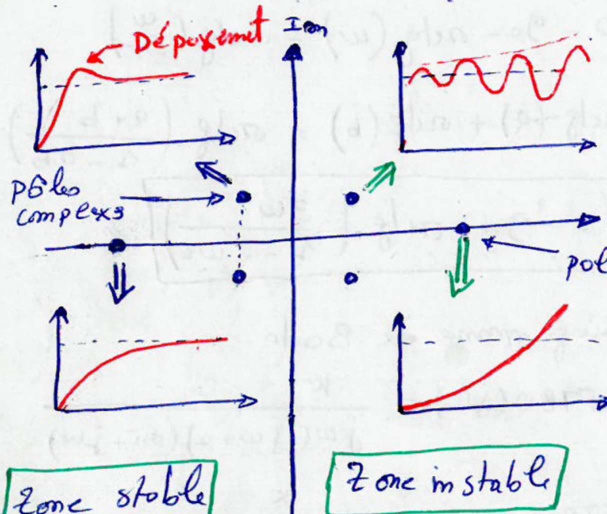
$$H(P) = \underbrace{\sum_i \frac{c_i}{P - P_i}}_{\text{poles réel}} + \underbrace{\sum_i \frac{a_i P + \beta_i}{(P - a_i)^2 + b_i}}_{\text{poles complexe}}$$

$\Rightarrow$ un pôle : $P = a + j\,b$

partie réelle

la partie imaginaire

un système linéaire est stable si et seulement si la fonct de transfert ne comporte que des pôles à partie réelle négative $Re < 0$



Zone stable

Zone instable

Ex : $H(P) = \dfrac{3}{P^3 + 2P^2 + 3P + 5}$

$\Rightarrow D(P) = P^3 + 2P + 3P + 5 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + 3x + 5 = 0$

$$\begin{cases} P_1 = -1.85 \\ P_2 = -0.078 + j1.64 \\ P_3 = -0.078 - j1.64 \end{cases}$$

P_1 ← pôles réel

P_2, P_3 } deux pôles imaginaire ↓ système représente un dépassement.

⇓

système est stable car les poles tous à partie réelles négative

*** Critère de Revers à partir du diagramme de Bode**

• Il faut vérifier :

① $\begin{cases} |FTBO(j\omega_1)| = 1 \Leftarrow \text{gain } G = 0 \\ Arg(FTBO(j\omega_1)) > -180° \end{cases}$

② $\begin{cases} Arg(FTBO(j\omega_2)) = -180° \\ |FTBO(j\omega_2)| < 1 \Leftarrow G < 0 \end{cases}$

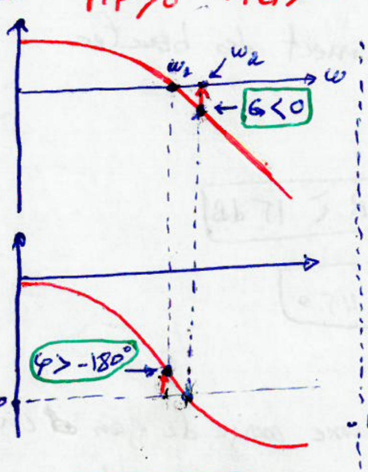
s'applique qu'en boucle ouverte

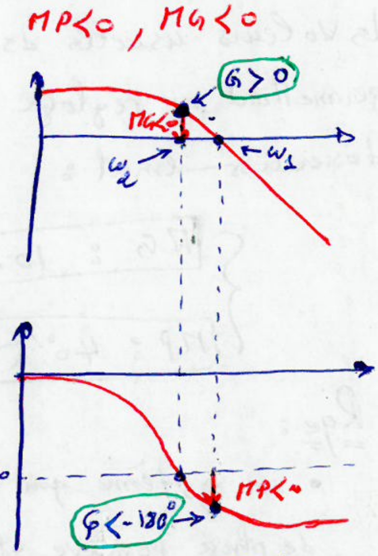
Cette méthode s'applique au cas où la fonct de transfert en boucle ouverte ne possède pas de zéro et de pôles instable.

Ex :

MP>0 MG>0

MP<0 , MG<0





système stable

⇓

vérifie les deux condits

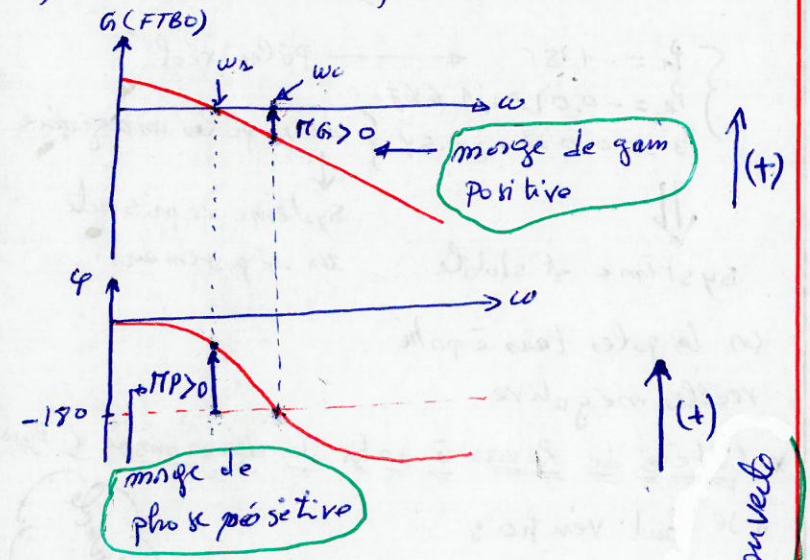
système instables

⇓

ne vérifie pas les deux condits.

* Marge de stabilité

Les marges de stabilité sont la marge de gain MG et marge de phase à définir pour un système afin d'éviter l'instabilité du système en boucle fermée.



s'applique en boucle ouverte

* Marge de gain : MG

$$\begin{cases} MG = -20\log(|FTBO(j\omega_c)|) \\ \omega_c / Arg(FTBO(j\omega_c)) = -180 \end{cases}$$

* Marge de phase MP

$$\begin{cases} MP = 180 + Arg(FTBO(j\omega_2)) \\ \omega_2 / |FTBO(j\omega_2)| = 1 \end{cases}$$

Les valeurs usuelles des marges de stabilité permettent un réglage correct des boucles d'asservissement :

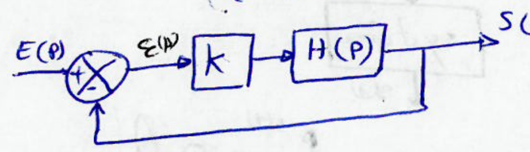
$$\begin{cases} MG : 10\,dB \text{ à } 15\,dB \\ MP : 40° \text{ à } 45° \end{cases}$$

Rqe :

- un système qui a une marge de gain ou de phase positive est un système stable.
- un système qui a une marge de gain ou une marge de phase négative ⟹ système instable.
- un système a une marge de phase ou gain nulle ⟹ système à la limite de stabilité

$$\begin{cases} MG > 0 \text{ ou } MP > 0 \Rightarrow \text{stable} \\ MG < 0 \text{ ou } MP < 0 \Rightarrow \text{instable} \\ MG = 0 \text{ ou } MP = 0 \Rightarrow \text{limite de stabilité} \end{cases}$$

Ex : $H(p) = \dfrac{1}{p(p+1)(p+0.5)}$ $\quad k > 0$



- Donner FTBO(p) ? puis FTBO(jω)
- Calculer le module et la phase de FTBO(jω)
- tracer le diagramme de Bode : le système est-il stable ?
- Calculer la valeur de k ?
  - → pour avoir MG = 6 dB, ⟹ déduire MP
  - ⟹ pour " MP = 45°, ⟹ " " " MG

Cor :

- FTBO(p) ? ⟹ $\boxed{FTBO(p) = \dfrac{k}{p(p+1)(p+0.5)}}$
- ↳ $\boxed{FTBO(j\omega) = \dfrac{k}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+0.5)}}$
- le module et la phase

$$\boxed{|FTBO(j\omega)| = \frac{k}{\omega\sqrt{(1+\omega^2)(\omega^2+0.25)}}}$$

$$\varphi = 0 - 90 - arctg(\omega) - arctg\left(\frac{\omega}{0.5}\right)$$

on $arctg(a) + arctg(b) = arctg\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$

↳ $\boxed{\varphi = -90 - arctg\left(\dfrac{3\omega}{1-2\omega^2}\right)}$

* le diagramme de Bode

on a : $FTBO(j\omega) = \dfrac{k}{j\omega(j\omega+1)(0.5+j\omega)}$

$$\Leftrightarrow FTBO(j\omega) = \frac{k}{0.5\,j\omega(1+j\omega)\left(1+j\frac{\omega}{0.5}\right)^2}$$

$$\Longleftrightarrow FTBO(j\omega) = \frac{K}{j\frac{\omega}{\omega_0}\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

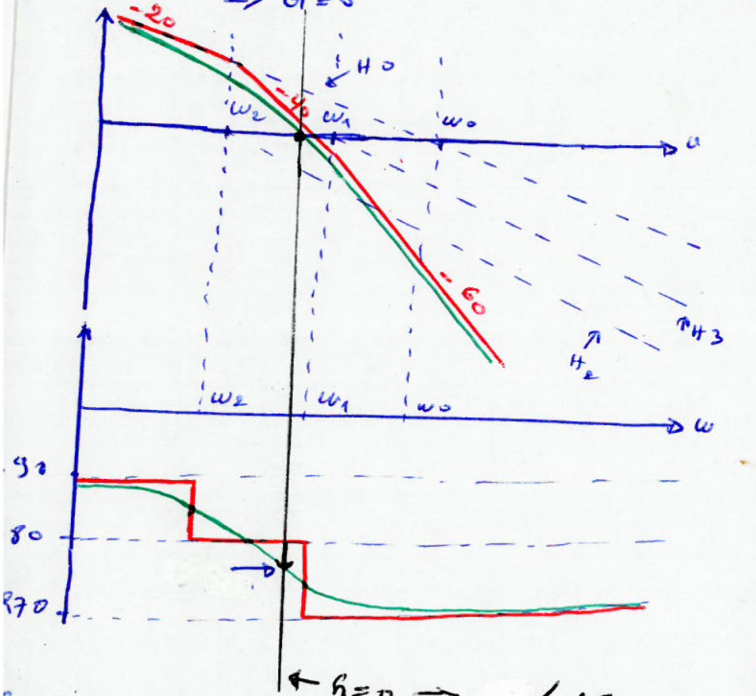
avec : $\omega_0 = \frac{1}{0,5} = 2$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0,5$

$\Rightarrow \omega_0 > \omega_1 > \omega_2$

$\Longleftrightarrow$

$$FTBO(j\omega) = K \times \overbrace{\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}}^{H_0} \times \overbrace{\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}}^{H_1} \times \overbrace{\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}}^{H_2}$$

si $K = 1 \Rightarrow G = 0$



$\leftarrow h = 0 \Rightarrow$ < -180

$h = 0$?

$\varphi < -180 \Rightarrow$ le système instable

les marges de stabilité

$$\begin{cases} MG = -20 \log(FTBO(j\omega_c)) \\ \omega_c / \operatorname{Arg}(FTBO(j\omega_c)) = -180 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} MP = 180 + \operatorname{Arg} FTBO(j\omega_1)) \\ \omega_1 / |FTBO(j\omega_1)| = 1 \end{cases} \quad (2)$$

pour $Mg = 6\,dB \Rightarrow K$?

on utilise la 1ère condition :

ω_c ? / $\operatorname{Arg}(FTBO(j\omega_c)) = -180$

$$-90 - \operatorname{arctg}\left(\frac{3\omega_c}{1-2\omega_c^2}\right) = -180$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{3\omega_c}{1-2\omega_c^2}\right) = -90$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3\omega_c}{1-2\omega_c^2} \longrightarrow +\infty$$

$$\Longleftrightarrow 1 - 2\omega_c^2 = 0 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707\ rad/s$$

$\Rightarrow$ cette $\omega_c \Rightarrow$ on la remplace dans MG

$$MG = 6\,dB = -20 \log\left(\frac{K}{\omega_c\sqrt{(1+\omega_c^2)(0,25+\omega_c^2)}}\right)$$

$$\Longleftrightarrow 6 = -20 \log\left(\frac{K}{\underbrace{0,75}_{K_c}}\right)$$

$$\Rightarrow K = K_c 10^{-\frac{6}{20}} \Rightarrow K = 0,375$$

$\Rightarrow$ la marge de phase pour ce gain K

on utilise l'équat (2)

$$|FTBO(j\omega_1)| = 1$$

$$\frac{K}{\omega_1\sqrt{(1+\omega_1^2)(0,25+\omega_1^2)}} = 1 \quad \text{avec } K = 0,375$$

$$\Longleftrightarrow \omega\sqrt{(1+\omega^2)(0,25+\omega^2)} = (0,375)$$

$$\Longleftrightarrow \omega_1^6 + 1,25\,\omega_1^4 + 0,25\,\omega_1^2 - (0,375)^2 = 0$$

on pose $X = \omega_1^2 \Rightarrow$

$$X^3 + 1,25X^2 + 0,25X - (0,375)^2 = 0$$

on prend que : la solution réelle.

$X = 0,2355$ $\Rightarrow \omega_1 = 0,485\ rad/s$

$$MP = 180 + \operatorname{Arg}(FTBO(j\omega_1))$$

$$MP = 180 - 90 - \operatorname{arctg}\left(\frac{3\omega_1}{1-2\omega^2}\right)$$

$$\Rightarrow MP = 20°$$

$$\boxed{K \nearrow \ MG \searrow \ MP \searrow}$$

marge de phase

On utilise la condition (2)

$\omega_1 / |FTBO(j\omega_1)| = 1$?

On a : $180 - 90 - \arctg\left(\frac{3\omega_1}{1-2\omega_1^2}\right) = 45$

$\Rightarrow \arctg\left(\frac{3\omega_1}{1-2\omega_1^2}\right) = 45$

$\Leftrightarrow \frac{3\omega_1}{1-2\omega_1^2} = 1$

$\Rightarrow 2\omega_1^2 + 3\omega_1 - 1 = 0$

$\hookrightarrow \omega_1 = 0.28$ rad/s

$$\frac{K}{\omega_1\sqrt{(\omega_1^2+1)(\omega_1^2+0{,}25)}} = 1$$

$\boxed{K = 0.166}$

$\Rightarrow$ la marge de gain MG ?

$$MG = -20\log\left(\frac{K}{\omega_c\sqrt{(\omega_c^2+1)(\omega_c^2+0{,}25)}}\right)$$

$\cancel{MG} =$

$\arg(FTBO(j\omega)) = -180$

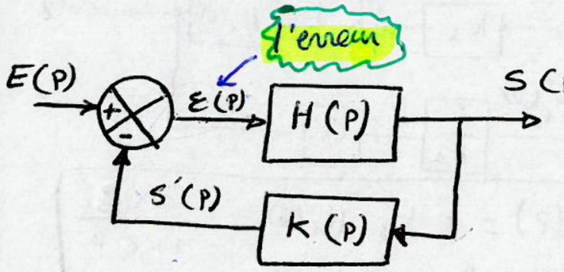
$\hookrightarrow \omega_c = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70$ rad/s

$\Leftrightarrow MG = -20\log\left(\frac{0.166}{0.75}\right)$

$\Rightarrow \boxed{MG = 13\,dB}$

Asservissement : la précision

le rôle d'un système asservi est de faire suivre à la sortie $s(t)$ à l'entrée $e(t)$



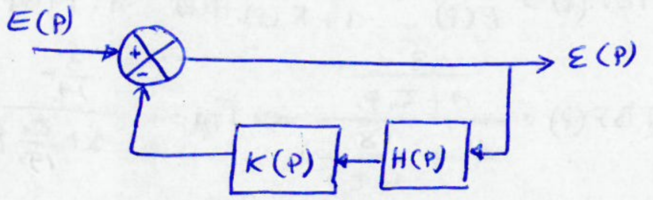
la précision du système sera mesurée par la valeur de $\varepsilon(t)$ en régime permanent c'est à dire :

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{P \to 0} P.\varepsilon(P)}$$

* la fonct de transfert en boucle ouverte

$$F_{TBO}(P) = K(P).H(P) = \frac{K}{P^{\alpha}} \cdot \frac{N(P)}{D(P)}$$

* la fonct d'erreur $\varepsilon(P) = H_{\varepsilon}(P).E(P)$

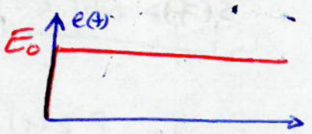


$$\Rightarrow \varepsilon(P) = \frac{1.E(P)}{1+F_{TBO}(P)} = \frac{1.E(P)}{1+K(P).H(P)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon(P) = \frac{1}{1+\frac{K}{P^{\alpha}} \frac{N(P)}{D(P)}} . E(P)}$$ avec $N(0)=1$, $D(0)=1$

* **Erreur statique ε_s**

On applique à l'entrée un échelon $e(t) = E_0 . u(t)$



$$\Rightarrow E(P) = \frac{E_0}{P}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{P \to 0} P.\varepsilon(P) = \lim_{P \to 0} \frac{1}{1+\frac{K}{P^{\alpha}}} . E_0$$

$$\Rightarrow \text{d'où : } \boxed{\varepsilon_s = \lim_{P \to 0} \frac{P^{\alpha} E_0}{P^{\alpha}+K}}$$

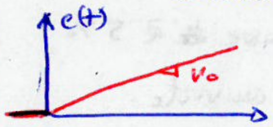
α : classe de système ou Nombre d'intégration de la fonct en boucle ouverte.

α	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
ε_s	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0
précision	n'est pas précis	précis	précis

> Le système est précis si sa fonct en boucle ouverte possède au moins une intégrat

* **Erreur de traînage**

On applique à l'entrée $e(t)$ une rampe $e(t) = V_0 . t . u(t)$



$$\Rightarrow E(P) = \frac{V_0}{P^2}$$

$$\varepsilon_T = \lim_{P \to 0} P.\varepsilon(P) \Rightarrow \varepsilon_T = \frac{V_0}{P} \frac{P^{\alpha}}{P^{\alpha}+K}$$

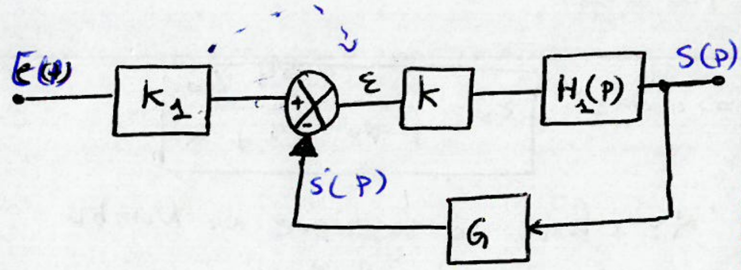
$$\hookrightarrow \boxed{\varepsilon_T = V_0 \frac{P^{\alpha-1}}{P^{\alpha}+K}}$$

α	0	1	2
ε_T	$+\infty$	$\frac{V_0}{K}$	0
Précision	Non	Non	Oui

C/C :

> Le système a une erreur de traînage nulle s'il y a au moins deux intégration

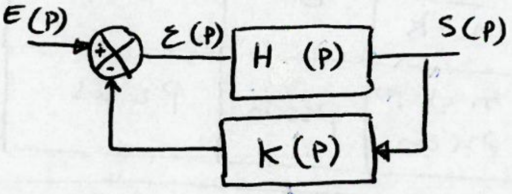
EX 2 %



Données : $K_1 = 2$, $K = 1.5$, $G = 3$

$H_1(P) = \frac{A}{1+\tau_1 P}$ avec : $A = 2$, $\tau = 0.5\,s$

1% simplifier le schéma bloc :



$H_1(P)$?

$K(P)$?

2% calculer la fonction en boucle ouverte FTBO(P) et la mettre sous la forme suivante : $FTBO(P) = \frac{K_{bo}}{1+\tau_{bo} P}$

Donner les valeurs K_{bo}, τ_{bo} ?

3% Déduire le temps de réponse à 5% de la fonct en boucle ouverte.

4% calculer la fonct de transfert en boucle fermée FTBF(P) et la mettre sous la forme suivante

$FTBF(P) = \frac{K_{bf}}{1+\tau_{bf} P}$

que vaut K_{bf} et τ_{bf}

5% déduire le temps de réponse à 5% et conclure sur la rapidité du système

6% on applique maintenant un echelon à l'entrée $e(t) = E_0 . u(t)$ avec $E_0 = 5V$

a% calculer la valeur final S_f

b% l'erreur statique

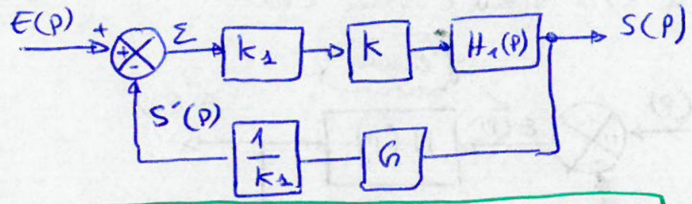
c% que peut-on dire de la précision du système

EX 2 - Corrigé

1% simplification du schéma

on a : $\varepsilon(P) = K_1 E(P) - G . S(P)$

$= K_1\left(E(P) - \frac{G}{K} S(P)\right)$



donc : $\boxed{H(P) = K . K_1 . H_1(P) = \frac{3\times 2}{1+\tau_1 P} \quad K(P) = \frac{G}{K_1} = \frac{3}{2} = 1{,}5}$

2% FTBO(P) ?

$FTB(P) = \frac{S'(P)}{\varepsilon(P)} = K_1 . K . \frac{G}{K_1} . H_1(P)$

$\boxed{FTB_o(P) = \frac{9}{1+0{,}5P}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{K_{bo} = 9} \\ \boxed{\tau_{bo} = 0{,}5} \end{cases}$

3% le temps de réponse $t_{r5\%}$

système 1er ordre $\Rightarrow \boxed{t_{r5\%} = 3\tau_{bo} = 1.5\,s}$

4% FTBF ?

$FTBF(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{H(P)}{1+K(P).H(P)} = \frac{H(P)}{1+FTB_o(P)}$

$FTBF(P) = \frac{\frac{6}{1+\tau_1 P}}{1+\frac{9}{1+\tau_1 P}} \Rightarrow F_{TBF} = \frac{\frac{6}{10}}{1+\frac{\tau_1}{10}P}$

$\boxed{K_{bf} = \frac{6}{10}}$, $\boxed{\tau_b = \frac{\tau_1}{10} = \frac{0.5}{10}}$

5% $t_{rf5\%} \Rightarrow$ 1er ordre $t_{r5\%} = \frac{3\tau_1}{10} = \frac{t_{ro5\%}}{10}$

$t_{rf5\%} = \frac{1}{10} . t_{ro5\%} = \frac{1{,}5}{10} = 0{,}15\,s$

système devient rapide

6% $e(t) = E_0\, u(t) \Rightarrow E(P) = \frac{E_0}{P}$

• $S(P) = \frac{E_0}{P} . \frac{K_{bf}}{1+\tau_{bf} P} \Rightarrow S_f = \lim_{P \to 0} P . S(P)$

$\boxed{S_f = K_{bf} . E_0}$

• $\varepsilon(P) = \frac{1}{1+FTBO(P)} . E(P)$

$\varepsilon(P) = \frac{1}{1+\frac{K_{bf}}{1+\tau_{bf} P}} \frac{E_0}{P} \Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{P \to 0} P . \varepsilon(P)$

$\boxed{\varepsilon_s = \frac{E_0}{1+K_{bf}} \neq 0}$

Le système non précis

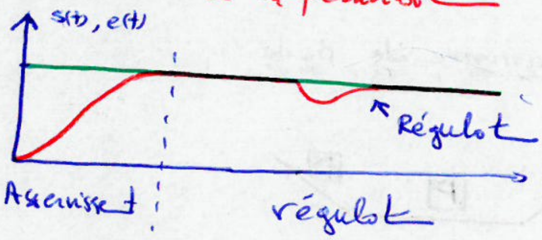
Asservissement : correct° des systèmes asservis

• Rôle de correct° :

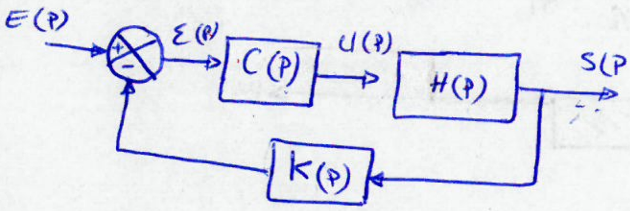
+ Améliorer l'asservissement :

→ rendre le système rapide, stable et précis.

+ Améliorer la régulat° du système vis-à-vis de la perturbat°



• Structure



C(P) : la fonct° de transfert de correcteur.

Correcteur : c'est la dispositive « Intelligente » dans une boucle de régulat° qui permet de traiter le signal d'écart ε(t) entre la consigne et la mesure de sortie en produisant un signal de correct° selon le principe d'act° ion

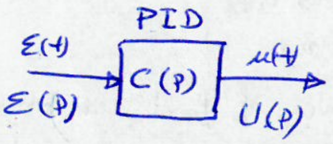
⇒ Action proportionnelle (P)

⇒ Act° intégrale (I)

⇒ Action dérivée. (D)

l'association des différentes act° :

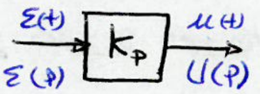
P, PI, PD, PID → Avance de phase



$$C(P) = \frac{U(P)}{\varepsilon(P)}$$

* Caractéristique des correcteurs

⊛ correcteur proportionnel : P



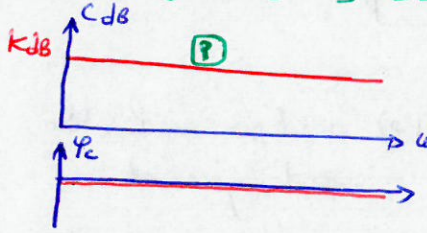
$\Rightarrow \boxed{u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t)}$

$\Downarrow$

$\boxed{U(P) = K_p \cdot \varepsilon(P)}$

$C(P) = K_p$

⇒ Diagramme de Bode



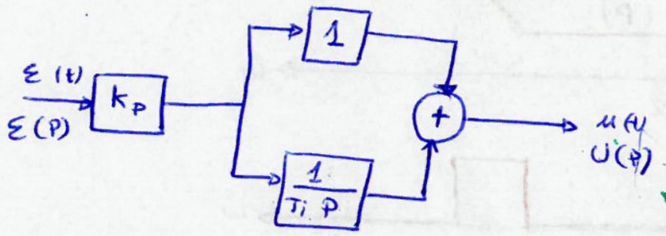
$\boxed{K_{dB} = 20 \log(K_p)}$

C/C ce type de correcteur :

→ augmente la précision et la rapidité

→ Diminue la stabilité (on peut y avoir l'instabilité si on augmente plus Kp)

⊛ correcteur proportionnel intégral PI



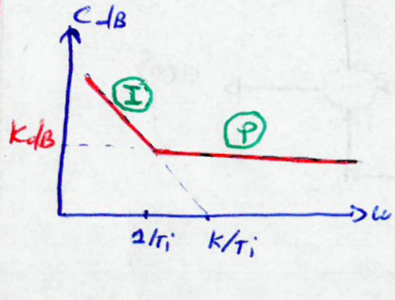
donc : $\boxed{u(t) = K_p\, \varepsilon(t) + \frac{K_p}{T_i} \int \varepsilon(t)\, dt}$

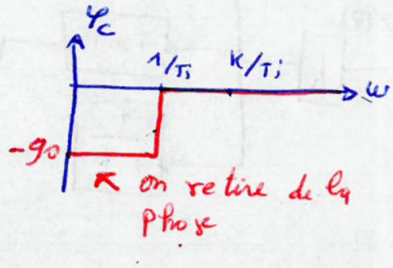
$\hookrightarrow \boxed{U(P) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i P}\right) \varepsilon(P)}$

$\Rightarrow \boxed{C(P) = K_p \frac{1 + T_i P}{T_i P}}$

$\hookrightarrow \boxed{C(j\omega) = K_p \frac{1 + T_i j\omega}{T_i j\omega}}$

⇒ Diagramme de Bode



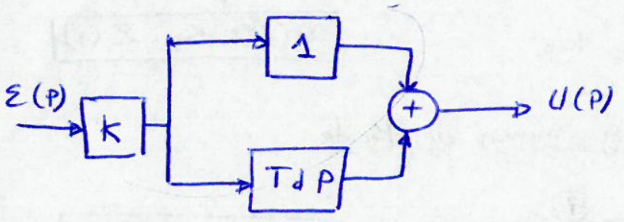


C/C : ce type de correcteur :

⊕ Annule l'erreur statique ⇒ précis

⊖ Ajoute une phase (−90°) ⇒ effet déstabilisant.

⇒ Correcteur PD : proportionnel dérivé !

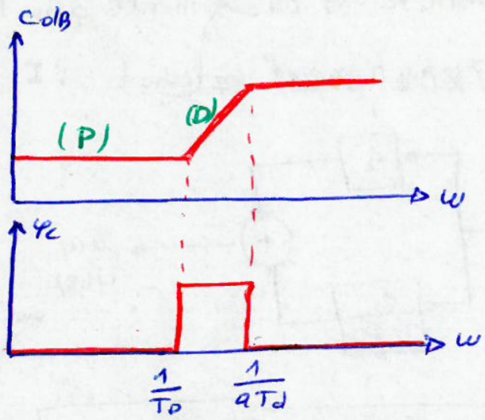


$C(P) = K(1 + Td\,P)$ n'est pas réalisable pratiquement

on le remplace par correcteur avance de phase

$$C(P) = K\,\frac{1 + Td\,P}{1 + aTd\,P} \quad \text{avec} \quad a < 1$$

⇒ Diagramme de Bode

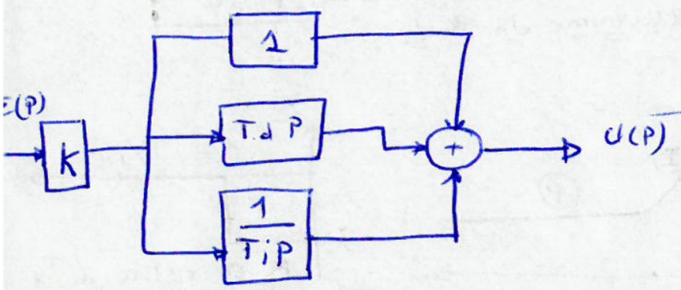


C/C : ce type de correcteur :

⇒ Augmente la marge de stabilité (Marge Phase)

⇒ ralentir le système : influe sur la rapidité

⊛ Correcteur PID



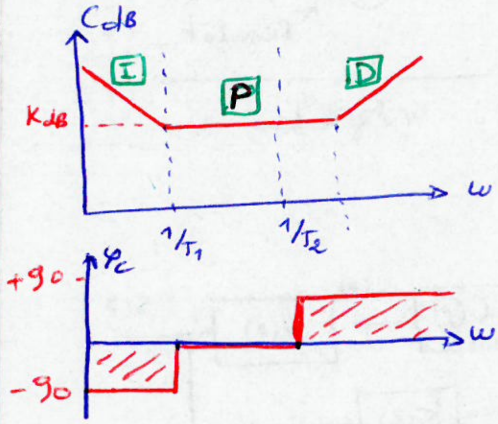
$$C(P) = K\,\frac{1 + T_i P + T_i T_d P^2}{T_i P}$$

$$C(P) = K\,\frac{(1 + T_1 P)(1 + T_2 P)}{T_i P}$$

$$\text{avec} \quad T_{1,2} = \frac{T_i}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4T_d/T_i}\right]$$

si $T_i \geq 4T_d$

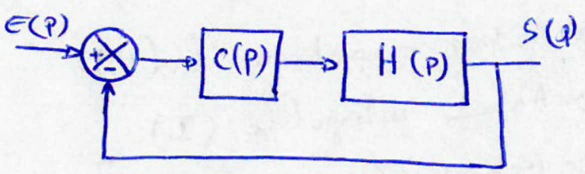
* Diagramme de Bode



C/C : Il combine les effets de l'action Intégrale (Annulation de l'erreur statique) et de l'action dérivée (stabilité et rapidité)

* Méthode de correcteur

* méthode 1 : Compensation des pôles cas de correcteur PI



$$C(P) = K\,\frac{1 + T_i P}{T_i P} \quad \text{et} \quad H(P) = \frac{K_1}{1 + \tau_1 P}$$

→ $K_1 = 2$

→ $\tau_1 = 1\,s$

cahier des charges :

+ l'erreur statique nulle

+ temps de réponse ⇒ $tr_{5\%}$

en BF $tr_{5\%} = 30\,ms$

• on souhaite avoir la fonct en boucle fermée, une fct de 1er ordre

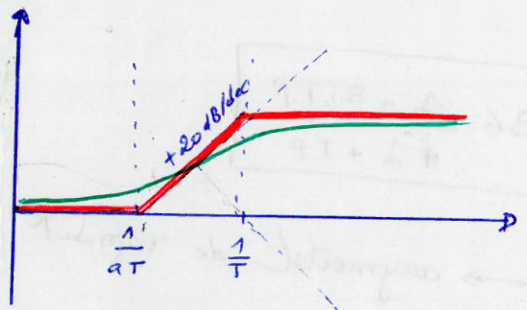
IV - Correcteur avance de phase.

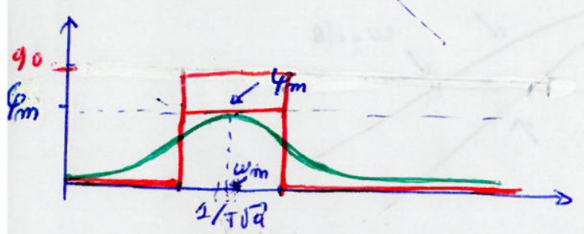
Les correcteur PI $\left[C(p) = k_i\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)\right]$ et que PD $(C(p) = K_d(1+T_D p))$ étant irréalisable physiquement, on leur préfère les correcteurs à avance et à retard de phase.

=> un correcteur à avance de phase est un correcteur de fonct de transfert $C(p) = K\frac{1+aTp}{1+Tp}$ avec $a > 1$

• on a $\varphi_m = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$

* Diagramme de Bode.





$$C(j\omega) = \frac{1+aTj\omega}{1+Tj\omega} = \left(1+j\frac{\omega}{\omega_a}\right)\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_d}}\right)$$

$$\omega_a = \frac{1}{aT} < \omega_d = \frac{1}{T}$$

C/C : Ce correcteur permet:

=> rendre le système stable

=> augmente la rapidité

* Réglage de K, a et T

• cahier des charges demande:

→ une marge de phase => stabilité

→ la pulsation ω_{0dB} correspond à un gain nul
↳ rapidité

=> comment faire les calcul

(1) ajuster $\omega_m = \omega_{0dB}$, si cette pulsation n'est pas donnée on le choisi supperieur à ω_{0dB} de boucle ouvert => la rapidité du système $\omega_{0dB} \uparrow$ => système rapide.

(2) la marge de phase donnée, nous permet de calculer φ_m:

$$M_\varphi = 45 = 180 + \mathrm{Arg}(FBO(j\omega_{0dB})) + \varphi_m$$

↳ $\varphi_m = M_\varphi - 180 - \arg(FBO(j\omega_{0dB}))$

on calcul a : $a = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$

=> donc calcul : $T = \frac{1}{\omega_{0dB}\sqrt{a}}$

=> on détermine K pour $\omega_m = \omega_{0dB}$
↳ pour avoir $|C.H| = 1$

Ex: $FTBO(p) = \frac{100}{p(1+0.1p)}$, $\varepsilon = 1$

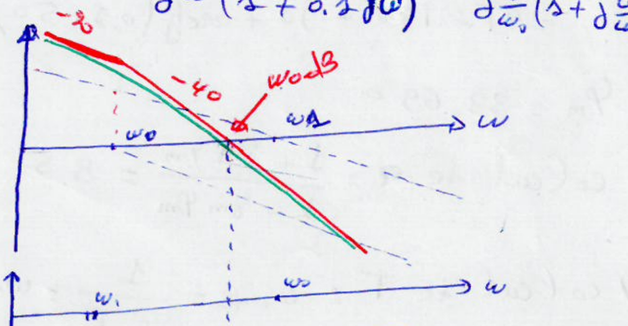
• On souhaite:

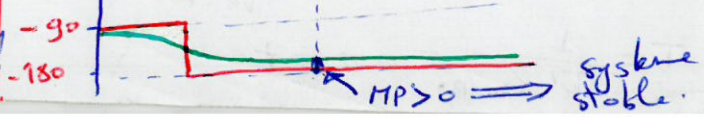
• une marge de phase de 45°

• une pulsation de gain nul égale $\omega_{0dB} = 50$ rad/s

=> on trace tous d'abord, le diagramme de Bode:

$$FTBO(j\omega) = \frac{100}{j\omega(1+0.1j\omega)} = \frac{K}{j\frac{\omega}{\omega_0}\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)}$$





système non corrigé :

pour gain nul : $G_0 = 0$, $\omega'_{0dB} = ?$

$$|FTBO(j\omega'_{0dB})| = 1$$

$$\frac{100}{\omega_{dB}\sqrt{1+(0.1\cdot\omega'_{0dB})^2}} = 1$$

$$\omega'^2_{0dB}\left(1+(0.1\cdot\omega'_{0dB})^2\right) = (100)^2$$

$$0.1^2\,\omega'^4_{0dB} + \omega'^2_{0dB} - (100)^2 = 0$$

$$0.01\,X^2 + X - (100)^2 = 0 \qquad X = \omega'^2_{0dB}$$

$\hookrightarrow X = 951$ soit $\boxed{\omega'_{0dB} = 30 \text{ rad/s}}$

⇒ Marge de phase ?

$$M_p = 180 + \mathrm{Arg}\left(FTBO(j\omega'_{0dB})\right)$$

$$MP = 180 - 90 - \mathrm{arctg}(0.1\,\omega'_{0dB})$$

$\boxed{MP = 18°}$ ⇒

maintenant on doit : dimensionner le correcteur avance de phase :

① on $\omega_m = \omega_{0dB} = 50$ rad/s

② calcul φ_m ?

$$M_p = 180 + \mathrm{Arg}\left(FTBO(j\omega_{0dB})\right) + \varphi_m$$

$$\varphi_m = M_p - 180 + 90 + \mathrm{arctg}(0.1\cdot\omega_{0dB})$$

$$= 45 - 180 + 90 + \mathrm{arctg}(0.1\times 50)$$

$$\varphi_m = 33.69°$$

③ calcul de $a = \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = 3,5$

4/ calcul de T : $\omega_{0dB} = \dfrac{1}{\sqrt{a}\cdot T} = \omega_m$

$$T = \frac{1}{\sqrt{a}\cdot\omega_{0dB}} = 0{,}0107\ s$$

5/ on calcule k pour avoir un gain nul à $\omega = \omega_{0dB} = 50$ rad/s

$$FTBO(j\omega) = k\,\frac{1+aTj\omega}{1+Tj\omega}\times\frac{100}{j\omega(1+j0{,}1\omega)}$$

$$G = 20\log k + 20\log\left(\frac{\sqrt{1+(aT\omega)^2}}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}\right) + 20\log\left(\frac{100}{\omega\sqrt{1+0{,}1\ldots}}\right)$$

⇒

$$G \simeq 20\log k + 20\log\sqrt{a} + 20\log\left(\frac{100}{\omega_{0dB}\sqrt{1+(0{,}1\omega)^2}}\right)$$

$$G = 20\log k + 5{,}44 - 8{,}13 = 0$$

$$k = 10^{+\frac{8{,}13-5{,}44}{20}} = 1.36$$

$$\Rightarrow \boxed{C(p) = 1{,}36\,\frac{1+3{,}5Tp}{1+Tp}}$$