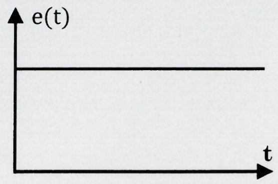
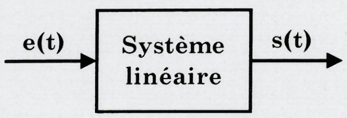
Stabilité des systèmes asservis

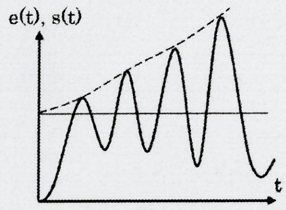
I. Introduction

L'évaluation d'un système asservi doit avant tout prendre en considération sa stabilité. En d'autres termes, la stabilité peut être définie simplement comme la capacité d'un système à produire une sortie bornée lorsque l'entrée est bornée.

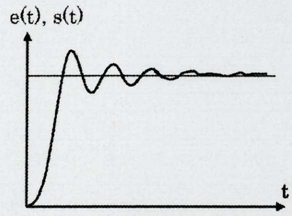


Entrée bornée (échelon)





instable
(non bornée)



stable
(bornée)

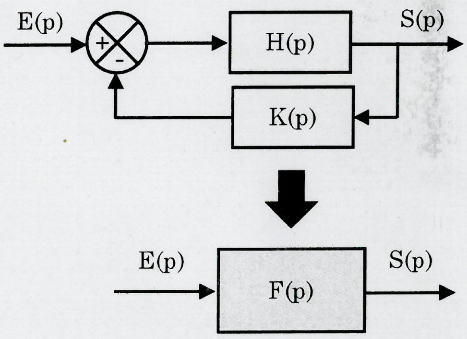
Deux approches d'étude sont envisageables, selon que l'on analyse la Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) du système ou la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO).

II. Analyse de la Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)

Cette méthode d'analyse de la stabilité d'un système asservi repose sur le calcul des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée FTBF. La stabilité d'un système est déterminée en évaluant ces pôles.

1. Les pôles d'un système en BF

Considérons le schéma fonctionnel d'un système de contrôle en boucle fermée tel que décrit :



L'expression de la fonction de transfert en boucle fermée, notée F(p), est donnée par

$$\boxed{F(p) = \frac{H(p)}{1 + K(p)\cdot H(p)}}$$

On peut également représenter cette fonction sous la forme suivante $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$, où D(p) désigne le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée.

Les pôles de FTBF(p) sont les valeurs de p qui annulent D(p) : $\boldsymbol{p = a + j\,b}$, On note a est la partie réelle de p ($\Re e\,(p)$) et b est la partie imaginaire de p ($\Im m(p)$)

❖ **Application au système 1er et 2ème ordre**

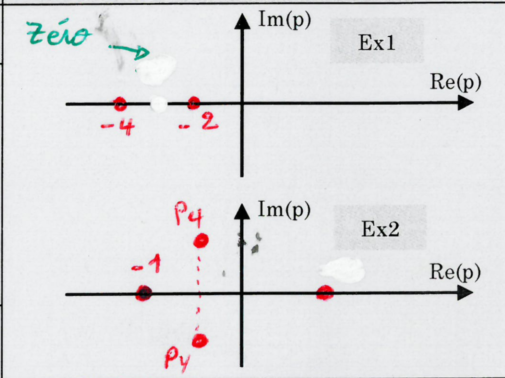
	Système premier ordre	***Système second ordre*** $(m < 1\ et\ \omega > 0)$
Fonction de transfert	$F(p) = \dfrac{K}{1 + \tau\, p}$	$F(p) = \dfrac{K}{1 + \frac{2m}{\omega n}\, p + \frac{1}{\omega n^2}\, p^2}$
Pôles	$1 + \tau p = 0$ d'où $\boxed{p = -1/\tau}$	$\begin{cases} p1 = -m\,\omega n - j\omega n\sqrt{1 - m^2} \\ p1 = -m\,\omega n + j\omega n\sqrt{1 - m^2} \end{cases}$
Partie réelle des pôles	$\boxed{\Re e\,(P) = -\frac{1}{\tau}}$	$\boxed{\Re e\,(P_1) = \Re e\,(P_2) = -m\,\omega_n}$

2. Critères de stabilité pour une fonction de transfert en BF : analyse des pôles

Il est possible de déterminer la stabilité d'un système de n'importe quel ordre en se basant sur ses pôles, conformément au critère suivant :

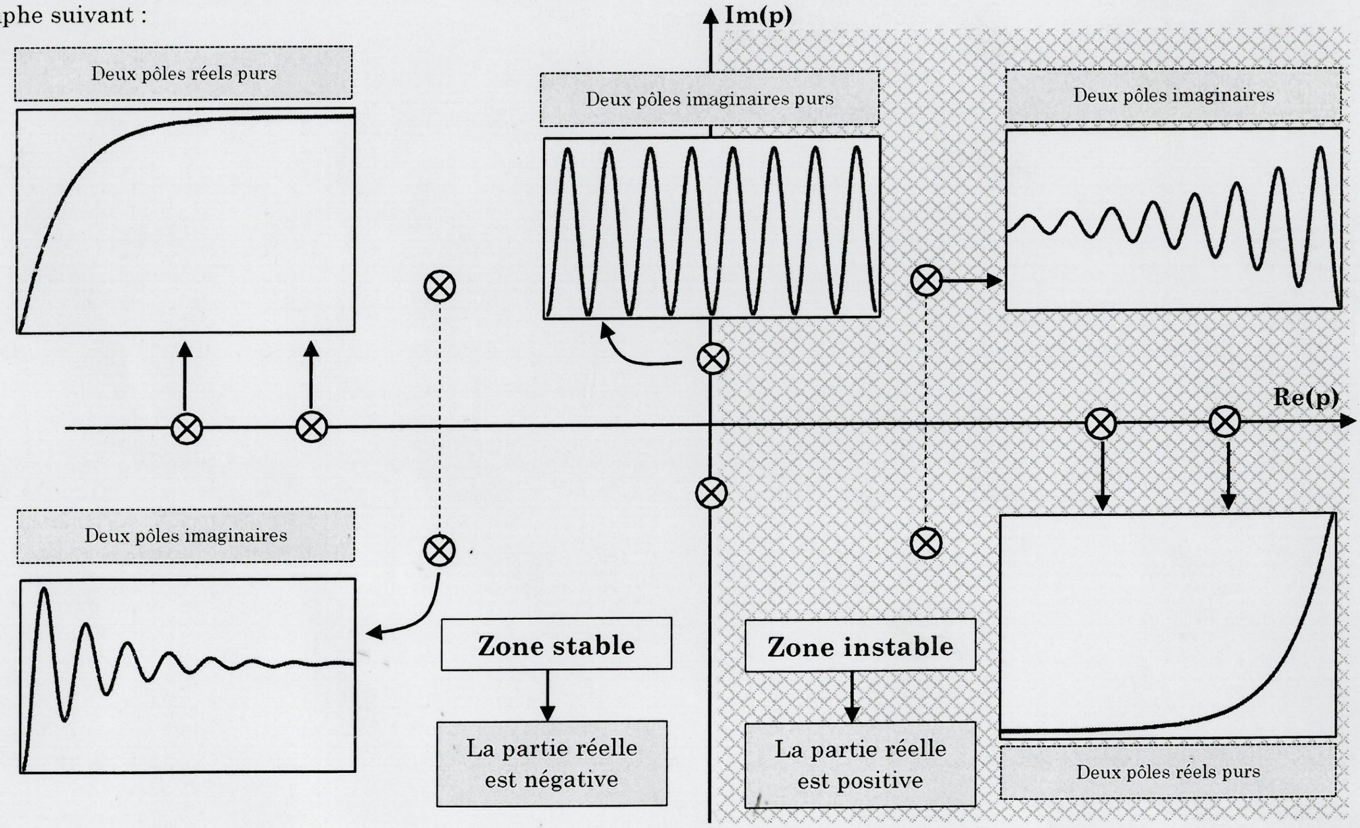
> *Un système linéaire est stable **si, et seulement si**, tous les pôles de sa fonction de transfert ont une **partie réelle négative**, c'est-à-dire* $\mathfrak{Re}\,(p) < 0$.

Afin d'illustrer cette notion plus clairement, examinons attentivement les deux exemples qui suivent :

	Exemple 1 : ordre 2	***Exemple 2 : ordre 4***	***Position des pôles(x) et des zéros (o)***
Fonction de transfert	$F(p) = \frac{6(p-3)}{(p+2)(p+4)}$	$F(p) = \frac{3}{(p-1)^2(p^2+p+1)}$	
Pôles et Zéro (solutions de numérateur)	* Zero $P-3=0 \Rightarrow z_0 = 3$ * pôles $P+2=0$, $P+4=0$ $\Rightarrow \begin{cases} P_1 = -2 \\ P_2 = -4 \end{cases}$	* Zero : — * pôles $P_1 = 1$, $P_2 = +1$ $P_3 = -0,5 + j0,87$ $P_4 = -0,5 - j0,87$	
Système stable ou non	système stable	système instable	

3. Allure et la réponse transitoire selon la position des pôles

Il est utile parfois de connaitre la nature de réponse de votre système en régime transitoire, pour se faire on se basant sur le graphe suivant :



Conclusion :

La règle de la stabilité précédente ne suffit pas à décrire comment se comporte un système asservi. Parfois, même si un système oscille beaucoup, il reste stable. Donc, pour comprendre mieux, on utilise des graphiques spéciaux appelés "plan de Bode".

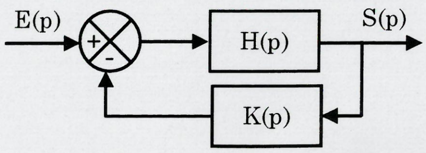
La méthode d'analyse des pôles ne fonctionne pas lorsque la fonction de transfert d'un système est connue. Au-delà de cela, l'analyse devient impossible.

III. Analyse de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO)

1. Point critique

Pour le système asservi illustré dans le schéma bloc ci-dessus :

$$FTBF(p) = \frac{H(p)}{1+K(p).\,H(p)}$$

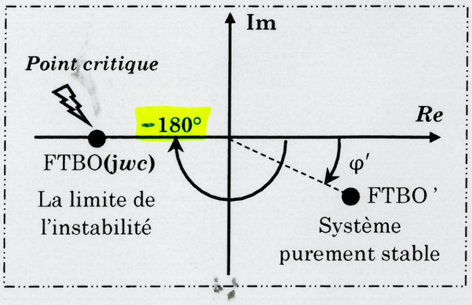


- La stabilité dépend du signe de la partie réelle des racines de :

  $1 + K(p).H(p) = 0$

- Les racines peuvent se mettre $pi = a + jb$, donc :

  $K(p).H(p) = -1 \Rightarrow \boldsymbol{FTBO(p) = -1}$



Le point « **−1** » sur le diagramme de Bode de la FTBO correspond au gain nul et l'argument de **−180°** : c'est le point critique.

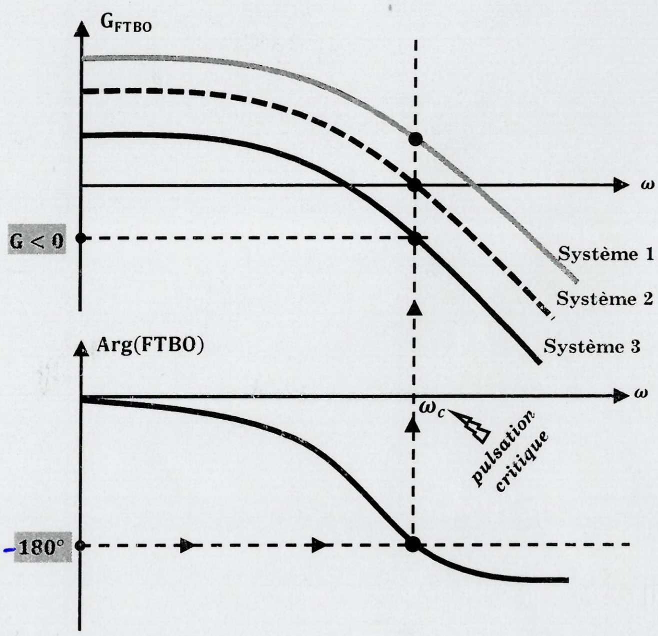
2. critère de stabilité

Le système sera stable en boucle fermée lorsque la pulsation critique ωc satisfait la condition pour laquelle:

$$Arg\big(\boldsymbol{FTBO}(\boldsymbol{j\,\omega_c})\big) = -180°$$

La courbe de gain de la FTBO passant sous le niveau de 0 dB implique que :

$$|\,\boldsymbol{FTBO}(\boldsymbol{j\,\omega_c})\,| < 1 \Rightarrow G_{FTBO(j\,\omega_c)} < 0$$



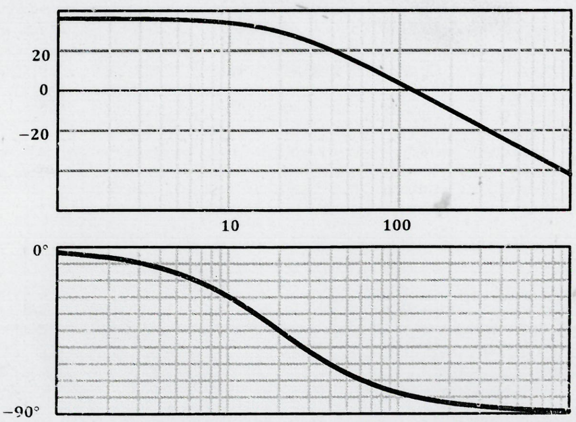
A partir des trois systèmes, on conclut que :

	Stable – instable – limite d'instabilité
Système 1	instable
Système 2	limite d'instabilité
Système 3	stable

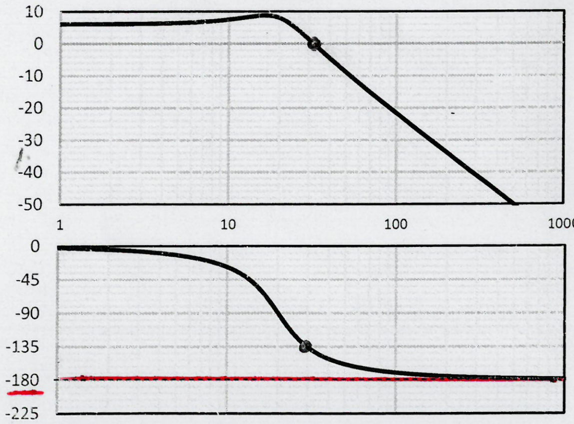
Cas particulier :

Il est important de souligner que la phase minimale d'un système de premier ordre est φ = – 90°, tandis que pour un système de deuxième ordre, elle est de φ = – 180° au minimum. Ainsi, à partir du critère de stabilité, nous pouvons en déduire une première conclusion :

Système de premier ordre



Système de deuxième ordre

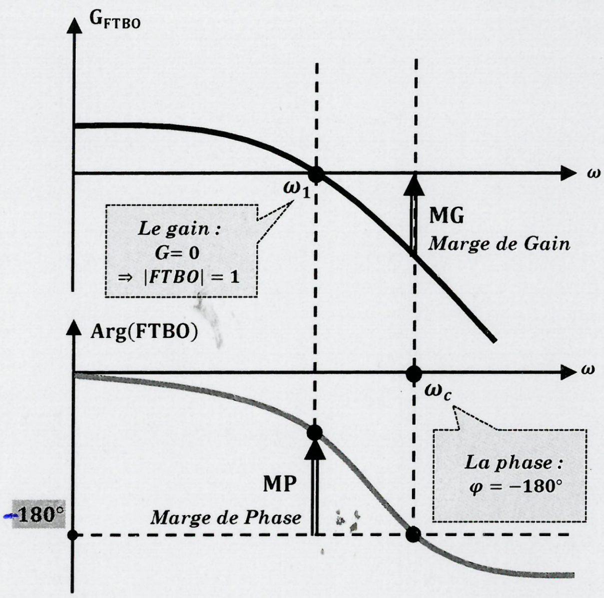


*Les systèmes ayant une fonction de transfert en boucle ouverte de **premier** ou de **deuxième** ordre **sont stables**.*

3. Les marges de stabilité

Lorsqu'un système se trouve au seuil de la stabilité, même une légère variation de ses paramètres, notamment liée à la température, peut conduire à son instabilité.

Pour évaluer la marge de sécurité vis-à-vis du point critique, les courbes de gain et de phase de la FTBO sont utilisées, permettant ainsi l'application de deux critères distincts.



❖ Marge de gain MG

C'est la distance en dB du point critique **(– 180° ; 0 dB)** au point d'intersection du diagramme de Bode avec la droite **$\phi = -180°$**. On note ω_C la pulsation (critique) pour laquelle : **Arg [FTBO(j ω_C)] = - 180°**.

$$\begin{cases} \mathbf{MG = 0 - 20\log_{10}(FTBO(j\,\omega_C))} \\ \omega_C \ / \ \mathrm{Arg}\,[\,\mathrm{FTBO}(j\,\omega_C)\,] = -180° \end{cases}$$

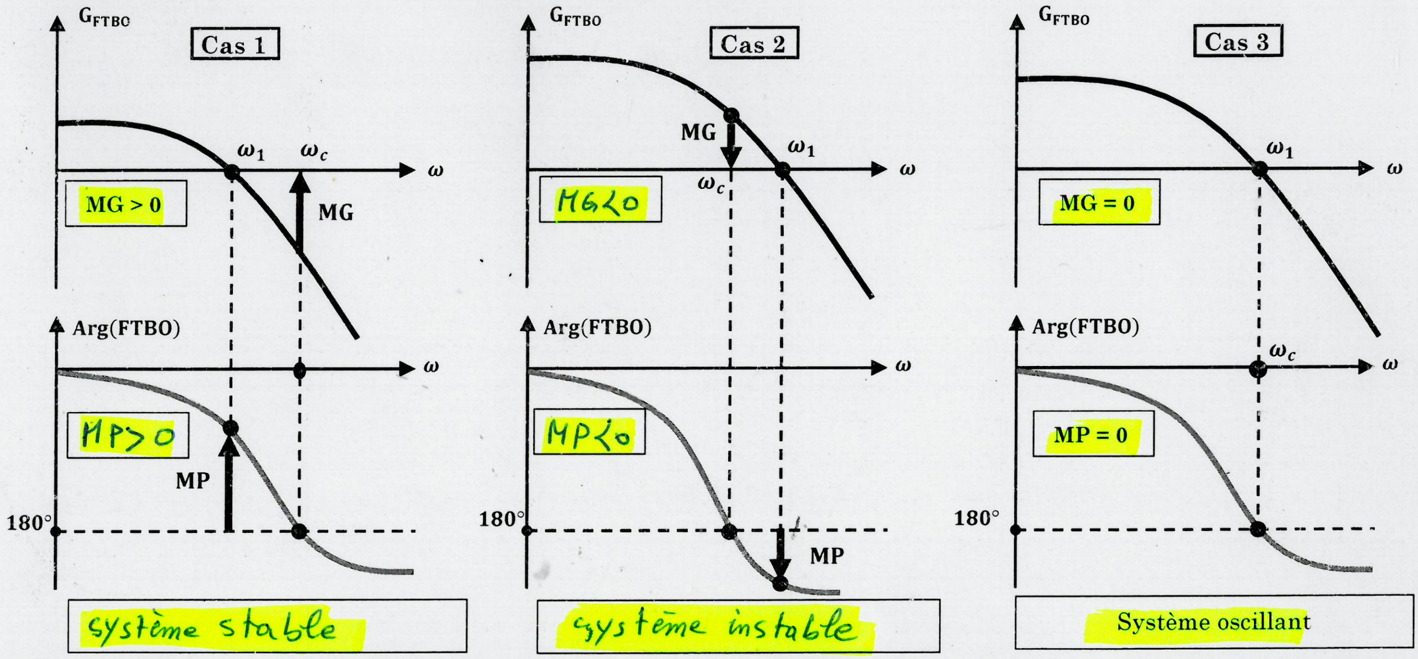
❖ Marge de phase MP

C'est la distance en degrés du point critique (– **180°** ; **0 dB**) au point d'intersection du diagramme de Bode avec la droite **G = 0** dB. On note $\boldsymbol{\omega_1}$ la pulsation (au "gain" unité «1 ») pour laquelle : $|\,\mathrm{FTBO}(j\,\omega_1)\,| = 1\ (0\ dB)$.

$$\begin{cases} \mathbf{MP = Arg\,[\,FTBO(j\,\omega_1)\,] - (-180)} \\ \omega_1 \ / \ |\,\mathrm{FTBO}(j\,\omega_1)\,| = 1 \end{cases}$$

Une marge de gain ou de phase positive maintient la stabilité d'un système, préservant son équilibre.

Afin de mieux comprendre les concepts de stabilité, examinons les trois cas suivants.



Dans le troisième cas, il devient évident qu'assurer des marges de gain et de phase est crucial pour renforcer la sécurité du système, car même une légère variation peut conduire à son instabilité.

*En pratique, il est courant d'ajuster la **marge de gain** entre **10 dB** et **15 dB**, tandis que la **marge de phase** est généralement réglée entre **40°** et **45°** ;*

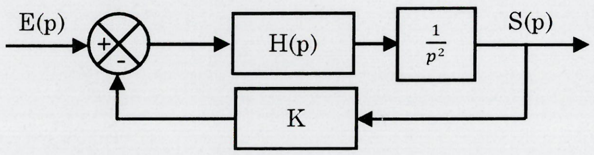
- **Cas particuliers**
  - Après avoir été bouclés, les systèmes du 1er et 2nd ordre, avec les formes standard, restent stables car ils n'atteignent jamais un déphasage de – 180° :

	Système 1[er] ordre	Système 2[ème] ordre
Marge de gain	$MG = +\infty$	$MG = +\infty$
Marge de phase	$MP > 0$	$MP > 0$

  - Quand il y a un intégrateur dans la boucle ouverte, cela crée une phase de – 90°, rapprochant ainsi le diagramme du point critique et augmentant le risque de déstabilisation du système.

En effet,

Si l'on considère que la boucle ouverte constitue une intégration, l'introduction d'une intégration supplémentaire de 1/p pour améliorer la précision modifie la phase du système en boucle ouverte, **ce concept sera approfondi dans la leçon à venir sur l'intégration**.



La phase :

$$\varphi(j\omega) = \mathbf{Arg}\left[\frac{1}{(j\omega)^2}\right] + \mathrm{Arg}\,[\,K.H(j\,\omega)\,]$$

$$\Rightarrow \varphi(j\omega) = \mathbf{-180} + \mathrm{Arg}\,[\,K.H(j\,\omega)\,] < -180$$

Système devient instable !!!!