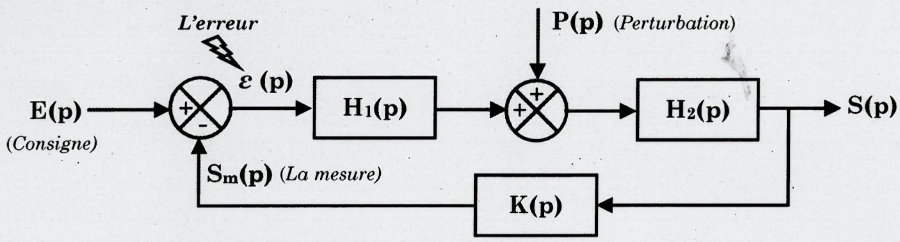
Précision des systèmes asservis

I. Introduction

La qualité d'un système asservi est évaluée en fonction de sa stabilité, de sa rapidité et de la précision avec laquelle il suit la consigne d'entrée. L'étude de la précision est l'étude de l'erreur se note généralement *ε(t)* entre la consigne *e(t)* et la mesure de de la sortie *s(t)*.



Le mot d'erreur faisant plutôt penser aux incertitudes, il est plus judicieux de réserver le nom d'écart à cette différence entre entrée et sortie. La précision sera d'autant meilleure que ε(t) tendra vers 0.

II. Structure des fonctions de transfert d'erreur

Pour évaluer la précision d'un système asservi, il est nécessaire de déterminer en premier lieu la fonction de transfert de l'écart ε(p). Celui-ci résulte de la somme des composantes $\varepsilon_E\ (p)$ et $\varepsilon_P(p)$: $\varepsilon(p)\ =\ \varepsilon_E\ (p)\ +\ \varepsilon_P(p)$

On distingue :

- $\varepsilon_E\ (p)$: écart dû à la consigne E(p) seule, c'est l'erreur de poursuite.
- $\varepsilon_P(p)$: écart causé par la perturbation P(p) seule, c'est l'erreur de régulation.

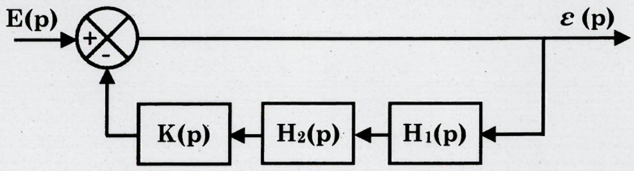
On détermine l'expression de ε(p) en appliquant le principe de superposition, il se calcul simplement en envisageant les deux cas suivants :

L'expression de ε(p) est trouvée en appliquant le principe de superposition. On peut la calculer simplement en examinant les deux cas suivants :

- En supprimant la perturbation P(p)=0, nous obtenons l'expression de $H_E(p) = \frac{\varepsilon(p)}{E(p)}$

  Le schéma bloc de ce cas, peut se mettre sous la forme :

  La fonction de transfert $H_E(p) = \frac{\varepsilon(p)}{E(p)}$, s'écrit alors :

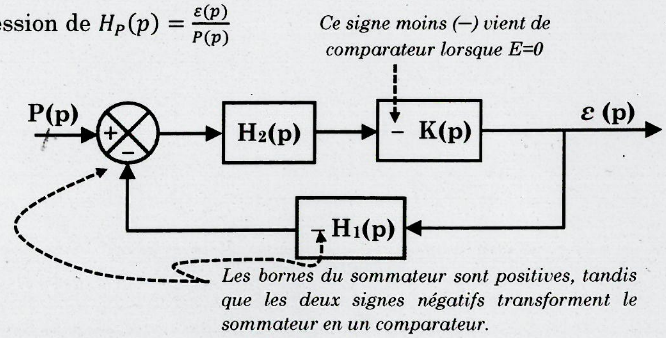


$$H_E(p) = \frac{1}{1 + K(p)\,H_1(p) \cdot H_2(p)}$$

- En supprimant la consigne E(p)=0, nous obtenons l'expression de $H_P(p) = \frac{\varepsilon(p)}{P(p)}$

  Le schéma bloc de ce cas, peut se mettre sous la forme :

  La fonction de transfert $H_P(p) = \frac{\varepsilon(p)}{P(p)}$, s'écrit alors :



$$H_P(p) = \frac{-\,K(p).H_2(p)}{1 + K(p).H_1(p).H(p)}$$

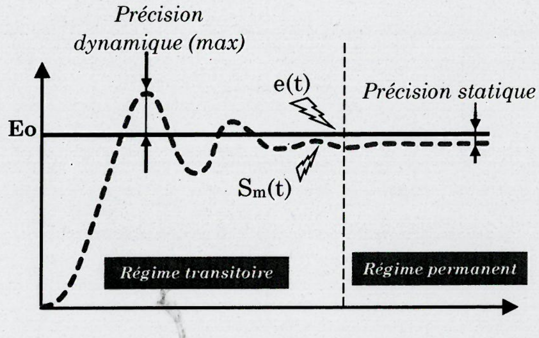
Comme $\mathrm{FTBO}(p) = \mathrm{K}(p).\mathrm{H}_1(p).\mathrm{H}_2(p)$ et en vertu du principe de superposition, il vient :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}\,E(p)\ -\ \frac{\mathrm{K}(p).\mathrm{H}_2(p)}{1 + FTBO(p)}\,P(p)$$

III. Précisons statique

En général, on distingue généralement deux catégories de précision : **la précision statique** et **la précision dynamique**.

- **Précision dynamique** : L'écart ε(t) varie en fonction du temps et est observé sur une plage de temps limitée.
- **Précision statique** : L'écart ε(t) reste constant et est mesuré après une période de temps assez longue pour que le système atteigne un état stable.



La précision dynamique, liée à la stabilité, est hors programme CPGE TSI. On focalise sur la précision statique, un critère majeur pour évaluer une boucle d'asservissement.

On distingue de type d'erreur :

- **Erreur statique ε_S** (ou **erreur de position**) lorsque la consigne e(t) ou la perturbation p(t) est un **échelon.**
- **Erreur de trainage ε_T (ou erreur de vitesse)** lorsque la consigne e(t) ou la perturbation p(t) est une **rampe.**

	Echelon	**Rampe**
Fonction temporelle	$e(t) = Eo.u(t)$	$r(t) = Vo.t.u(t)$
Fonction de transfert	$E(p) = \frac{Eo}{p}$	$R(p) = \frac{Vo}{p^2}$

1. Ecart de poursuite : P(p) = 0

1.1. Calcul de l'écart ε

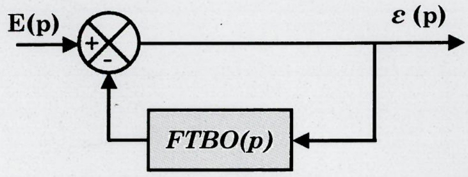
On détermine la précision statique en évaluant l'écart ε(t) en régime permanent, ce qui se traduit par :

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t)}$$

Pour lier ε(t) à mesure que t tend vers +∞ à ε(p) de manière symbolique, on met en œuvre le théorème de la valeur finale.

$$\varepsilon = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon(p)$$

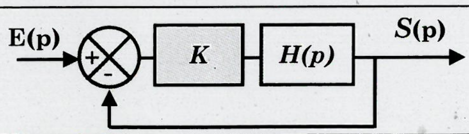
Avec : $\varepsilon(p) = \frac{1}{1+FTBO(p)} E(p)$ ➔ $\boxed{\varepsilon = \lim_{p \to 0} p.\frac{1}{1+FTBO(p)} E(p)}$



Exemple : calcul de l'erreur statique et l'erreur de trainage

Nous considérons deux cas d'asservissement : une avec un **gain proportionnel (1)** et l'autre avec une **intégration (2)**. La fonction de transfert H(p) est supposée premier ordre : $\mathbf{H(p)} = \frac{A}{1+\tau p}$

Cas 1



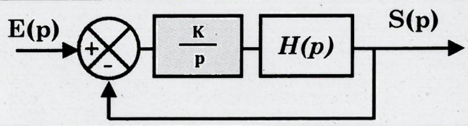
Erreur statique :

$$\varepsilon = \lim_{p \to 0} p \frac{1}{1+FTBO(p)} E(p) \quad \text{Echelon}$$

$$= \lim_{p \to 0} p \times \frac{1}{1+K H(p)} \cdot \frac{Eo}{p}$$

d'où : $\boxed{\varepsilon_s = \frac{Eo}{1+K.A}}$

Cas 2



Erreur statique

$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} p . \frac{1}{1+FTBO(p)} . E(p)$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} p \frac{1}{1+\frac{K}{p} H(p)} \cdot \frac{Eo}{p}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} p \frac{p}{p+K H(p)} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_s = 0}$$

1.2. Expression générale de l'écart

Comprendre la précision statique est très important. Cela aide à prédire si l'erreur sera zéro ou non en fonction de la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte FTBO du système.

En utilisant la fonction de transfert FTBO précédemment mentionnée (paragraphe II), elle peut être exprimée comme suit :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1 + a_1 p + \dots + a_m p^m}{1 + b_1 p + \dots + b_n p^n} = \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{N(p)}{D(p)} \quad \text{avec} \quad N(0) = D(0) = 1$$

Dans cette formule, le terme "**α**" indique **la classe du système** en boucle ouverte (BO). En réalité, "**α**" représente aussi le **nombre d'intégration** présents dans la boucle ouverte.

Note : il faut **m ≤ n + α** pour assurer la causalité du système.

L'expression générale de l'écart :

$$\varepsilon = \lim_{p \to 0} p \cdot \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p) = \lim_{p \to 0} \frac{p}{1 + \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{N(p)}{D(p)}} E(p) \quad \text{Comme } N(0) = D(0) = 1 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha} + K} E(p)}$$

Le tableau ci-dessous illustre l'erreur statique et l'erreur de traînage en relation avec la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).

Erreurs	Erreur statique εs			Erreur de trainage εT		
Expression	$E(p) = \frac{Eo}{p} \Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha}}{p^{\alpha} + K} Eo$			$E(p) = \frac{Vo}{p^2} \Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{p \to 0} V_0 \frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha} + K}$		
Classe	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Valeur	$\frac{1}{1+K}$	0	0	$+\infty$	$\frac{V_0}{K}$	0
Précision	non précis	précis	Précis	non précis	non précis	précis

*Pour éliminer **l'erreur statique**, il est nécessaire d'avoir au **moins une intégration** dans la boucle ouverte. Pour éliminer **l'erreur de traînage**, il faut avoir au moins **deux intégrations** dans la boucle ouverte.*

2. Ecart régulation : E(p) = 0

Pour l'aspect régulation, la consigne étant constante, sa variation est nulle : E(p) = 0. Dans ces conditions, on a montré au paragraphe II :

$$\varepsilon(p) = -\frac{K(p).H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p)$$

Si on considère les fonctions de transfert H1 et H2, s'écrivent comme suit : $H_1(p) = \frac{K1}{p^{\alpha 1}} \frac{N1(p)}{D1(p)}$ et $H_2(p) = \frac{K2}{p^{\alpha 2}} \frac{N2(p)}{D2(p)}$. On note que N1(0)=N2(0)= D1(0)=D2(0)=0 et que $K(p) = Kr > 0$. Après tous les calculs effectués, la fonction d'erreur s'écrit :

- Pour un échelon de perturbation $\mathbf{P(p)} = \frac{Po}{p}$ ➔ $\boxed{\varepsilon p = \lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha 1} Kr\, K2}{p^{\alpha 1 + \alpha 1} + Kr\, K1\, K2} Po}$.

Donc on a trois cas particuliers :

$\alpha 1 \geq 1$	$\alpha 1 = \alpha 2 = 0$	$\alpha 1 = 0$ et $\alpha 2 \geq 1$.
$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_p = -\frac{Kr\, K2}{1 + Kr\, K1\, K2} Po$	$\varepsilon_p = -\frac{Po}{K1}$

Un système comportant en BO, au moins une intégration en amont du point d'application de la perturbation (α1 ≥ 1), présente un écart statique nul en réponse à un échelon de perturbation.