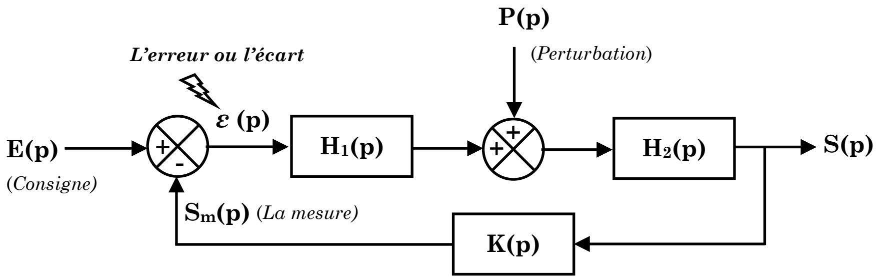
Chapitre 2 : Précision des systèmes asservis

I. Introduction

De façon générale, la précision d'un système exprime sa capacité à reproduire fidèlement une grandeur de référence, en réduisant les écarts entre l'entrée et la sortie. Elle dépend principalement du type de système, du correcteur et des perturbations.

La qualité d'un système asservi est évaluée en fonction de sa stabilité, de sa rapidité et de la précision avec laquelle il suit la consigne d'entrée. L'étude de la précision est l'étude de l'erreur se note généralement *ε(t)* entre la consigne *e(t)* et la mesure de de la sortie *s(t)*.



Le terme « **erreur** » évoquant plutôt des incertitudes, il est préférable d'utiliser le mot « **écart** » pour désigner la différence entre l'entrée et la sortie. La précision est d'autant meilleure que **ε(t)** tend vers **zéro**.

II. Structure des fonctions de transfert d'erreur ε(p)

Pour évaluer la précision d'un système asservi, il convient de déterminer au préalable la fonction de transfert de l'écart $\varepsilon(p)$. Cet écart se décompose en deux composantes : $\boldsymbol{\varepsilon_E(p)}$ et $\boldsymbol{\varepsilon_P(p)}$, soit :

$$\boldsymbol{\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) + \varepsilon_P(p)}$$

Où :

- $\varepsilon_E(p)$: écart dû uniquement à la consigne E(p), appelé erreur de poursuite,
- $\varepsilon_P(p)$: écart causé uniquement par la perturbation P(p), appelé erreur de régulation.

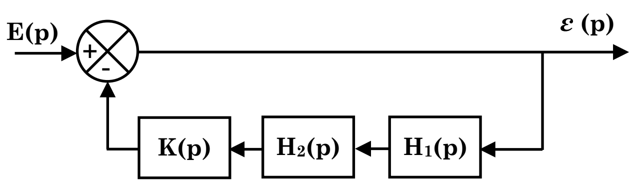
L'expression de $\varepsilon(p)$ est obtenue en appliquant le principe de superposition, en considérant séparément chacun des deux cas :

➲ **En annulant la perturbation P(p) = 0,** on obtient l'expression de la fonction de transfert de l'écart par rapport à la consigne : $\mathbf{H_E(p)} = \frac{\varepsilon(p)}{E(p)}$.

Le schéma bloc correspondant peut alors être représenté, et la fonction de transfert $\mathbf{H_E(p)}$ s'écrit :

$$H_E(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}$$

d'où : $$H_E(p) = \frac{1}{1 + K(p) \cdot H_1(p) \cdot H_2(p)}$$

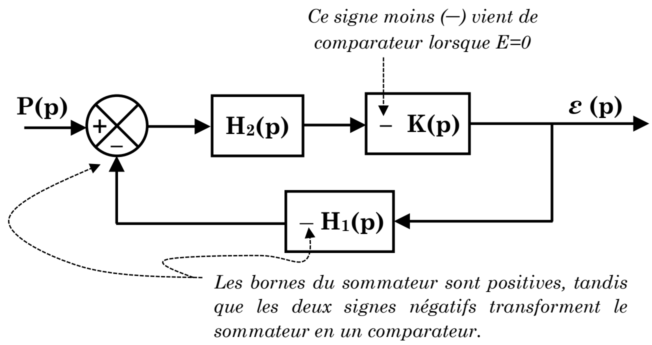


➲ **En annulant la consigne E(p) = 0,** on obtient l'expression de la fonction de transfert de l'écart par rapport à la consigne : $\mathbf{H_P(p)} = \frac{\varepsilon(p)}{P(p)}$.

Le schéma bloc correspondant peut alors être représenté, et la fonction de transfert $\mathbf{H_P(p)}$ s'écrit :

$\Rightarrow H_p(p) = \dfrac{-K(p).H_2(p)}{1+FTBO(p)}$

d'où : $H_p(p) = \dfrac{-K(p).H_2(p)}{1+K(p).H_1(p).H_2(p)}$

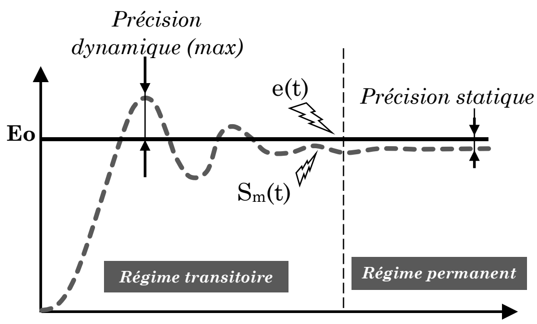


Étant donné que la fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit : $\mathbf{FTBO(p) = K(p) \cdot H_1(p) \cdot H_2(p)}$ et en appliquant le principe de superposition, on obtient : $\boxed{\mathbf{\varepsilon(p) = \dfrac{1}{1\,+\,FTBO(p)}\,.\,E(p)\;-\;\dfrac{K(p)\cdot H_2(p)}{1\,+\,FTBO(p)}\,.\,P(p)}}$

III. Précision statique

On distingue généralement deux formes de précision : statique et dynamique.

- **Précision dynamique :** l'écart $\varepsilon(t)$ évolue au cours du temps et se mesure sur une période limitée.
- **Précision statique :** l'écart $\varepsilon(t)$ devient constant et se mesure lorsque le système a atteint son régime permanent.



La précision dynamique, étroitement liée à la stabilité, n'est pas abordée dans le programme CPGE TSI. Nous nous concentrons donc sur **la précision statique**, critère essentiel pour évaluer une boucle d'asservissement.

1. Étude de l'erreur de poursuite (sans perturbation) : P(p) = 0

1.1. Calcul de l'écart ε

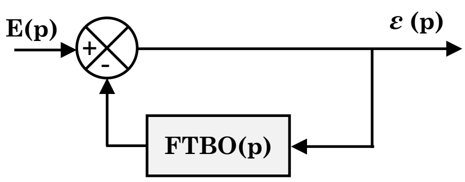
On évalue la **précision statique** en déterminant l'écart $\varepsilon(t)$ en régime permanent, ce qui s'écrit : $\boxed{\mathbf{\varepsilon = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t)}}$

Pour relier $\varepsilon(t)$ à $\varepsilon(p)$ (image de Laplace) lorsque $t \to +\infty$, on applique le théorème de la valeur finale :

$$\mathbf{\varepsilon = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\,.\,\varepsilon(p)}$$

Or : $\varepsilon(p) = \dfrac{1}{1+FTBO(p)}\,E(p)$

Ainsi : $\boxed{\mathbf{\varepsilon = \lim_{p\to 0}\; p \cdot \dfrac{1}{1\,+\,FTBO(p)}}}$



On distingue deux types d'erreur :

- **Ecart statique ε_S** (ou **erreur de position**) lorsque la consigne e(t) ou la perturbation p(t) est un **échelon.**
- **Ecart de trainage ε_T (ou erreur de vitesse)** lorsque la consigne e(t) ou la perturbation p(t) est une **rampe.**

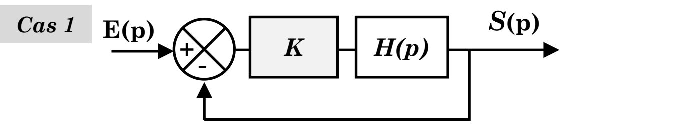
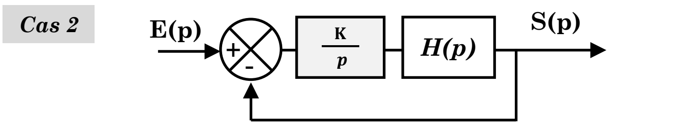
	Echelon	Rampe
Fonction temporelle	$\mathbf{e(t) = Eo.u(t)}$	$\mathbf{r(t) = Vo.t.u(t)}$
Fonction de transfert dans le domaine de Laplace	$E(p) = \dfrac{E_o}{p}$	$R(p) = \dfrac{V_o}{p^2}$

Exemple : Calcul de l'écart statique et de l'écart de traînage

On considère deux types d'asservissement :

- **Cas 1 :** Un asservissement avec un **correcteur proportionnel**.
- **Cas 2 :** Un asservissement avec un **correcteur intégrateur**.

La fonction de transfert du système étudié est supposée être du premier ordre : $H(p) = \frac{A}{1+\tau.p}$

Cas 1	Cas 2
	
On a : $FTBO(p) = K.H(p) = \frac{K.A}{1+\tau p}$ Or : $\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p.\frac{1}{1+FTBO(p)}.E(p)$ * erreur statique : $E(p) = \frac{E_0}{p}$ $\Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p \frac{1}{1+\frac{A.K}{1+\tau p}}.\frac{E_0}{p} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{E_0}{1+A.K}$ * Erreur de traînage ε_T $\Rightarrow \varepsilon_T = \lim_{p\to 0} p \frac{1}{1+\frac{A.K}{1+\tau p}}.\frac{V_0}{p^2} \Rightarrow \varepsilon_T = +\infty$	On a : $FTBO(p) = K.H(p) = \frac{K.A}{p(1+\tau p)}$ Or : $\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p.\frac{1}{1+FTBO(p)}.E(p)$ * erreur statique : $E(p) = \frac{E_0}{p}$ $\Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p \frac{1}{1+\frac{A.K}{p(1+\tau p)}}.\frac{E_0}{p} \Rightarrow \varepsilon_s = 0$ * Erreur de traînage ε_T $\Rightarrow \varepsilon_T = \lim_{p\to 0} p \frac{1}{1+\frac{A.K}{p(1+\tau p)}}.\frac{V_0}{p^2} \Rightarrow \varepsilon_T = \frac{V_0}{A.K}$

1.2. Expression générale de l'écart

La **précision statique** d'un système est une notion essentielle, car elle permet de prédire si l'erreur en régime permanent sera nulle ou non, en fonction de la structure de la fonction de transfert en boucle ouverte FTBO(p).

En reprenant la fonction de transfert en boucle ouverte (vue au paragraphe II), on peut l'écrire sous la forme :

$$\mathbf{FTBO(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \times \frac{1+a_1p+\dots+a_m p^m}{1+b_1p+\dots+b_n p^n} = \frac{K}{p^\alpha} \times \frac{N(p)}{D(p)} \quad \text{Avec : } N(0) = D(0) = 1$$

Ici, le paramètre α représente **la classe** du système en boucle ouverte, c'est-à-dire le **nombre d'intégrations** présentes dans la FTBO.

Remarque : Pour assurer la **causalité** du système, il faut respecter $\mathbf{m \leq n + \alpha}$.

Le tableau ci-dessous illustre l'erreur statique et l'erreur de traînage en relation avec la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).

Erreurs	**L'écart statique ε_S**			**L'écart de trainage ε_T**		
Expression	$E(p) = \frac{Eo}{p} \Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{p\to 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} Eo$			$E(p) = \frac{Vo}{p^2} \Rightarrow \varepsilon_T = \lim_{p\to 0} V_0 \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K}$		
Classe	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Valeur	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	$+\infty$	$\frac{V_0}{K}$	0
Précision	non précis	précis	**Précis**	non précis	non précis	précis

*Pour éliminer **l'écart statique**, il est nécessaire d'avoir au **moins une intégration** dans la boucle ouverte. Et pour éliminer **l'écart de traînage**, il faut avoir au moins **deux intégrations** dans la boucle ouverte.*

2. Étude de l'erreur de régulation (avec perturbation) : E(p) = 0

Pour l'aspect régulation, la consigne étant constante, sa variation est nulle : E(p) = 0. Dans ces conditions, on a montré au paragraphe II :

$$\boldsymbol{\varepsilon(p)} = -\ \frac{\mathbf{K(p).H_2(p)}}{\mathbf{1 + \boldsymbol{FTBO(p)}}}\ \boldsymbol{P(p)}$$

En considérant les fonctions de transfert H1 et H2, on peut les écrire sous la forme :

$$\mathbf{H_1(p)} = \frac{\mathbf{K_1}}{\mathbf{p^{\alpha_1}}}\frac{\mathbf{N_1(p)}}{\mathbf{D_1(p)}} \quad \text{et} \quad \mathbf{H_2(p)} = \frac{\mathbf{K_2}}{\mathbf{p^{\alpha_2}}}\frac{\mathbf{N_2(p)}}{\mathbf{D_2(p)}}$$

- On impose les conditions suivantes : $\mathbf{N1(0) = N2(0) = D1(0) = D2(0) = 1}$
- Et on suppose que le le gain de bloc de la chaine de retour est constant : $\mathbf{K(p) = Kr > 0}$

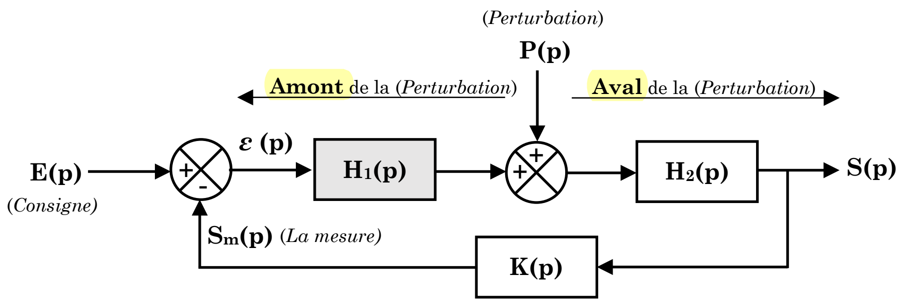
Après simplifications et calculs, l'expression de la fonction d'erreur devient :

Pour un échelon de perturbation : $\mathbf{P(p)} = \frac{\mathbf{Po}}{\mathbf{p}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{\varepsilon_p} = \lim\limits_{p \to 0} \frac{-\ p^{\alpha 1}.\ Kr.\ K2}{p^{\alpha 1 + \alpha 1}\ +\ Kr\ K1\ K2}\ \mathbf{P_o}}$

Donc on a trois cas particuliers :

$\boldsymbol{\alpha 1\ \geq\ 1}$	$\boldsymbol{\alpha 1\ =\ \alpha\, 2\ =\ 0}$	$\boldsymbol{\alpha 1\ =\ 0\ \text{et}\ \alpha 2\ \geq\ 1}$.
$\boldsymbol{\varepsilon_p} = 0$	$\varepsilon_p = -\dfrac{\text{Kr K2}}{1\ +\ \text{Kr K1 K2}}\ \text{Po}$	$\varepsilon_p = -\dfrac{\text{Po}}{\text{K1}}$

Un système dont la boucle ouverte comporte **au moins une intégration située en amont du point d'application de la perturbation** ($\boldsymbol{\alpha 1 \geq 1}$) présente un **écart statique nul** lorsqu'il est soumis à une perturbation **en échelon**.



Remarque importante : *Cette formulation met en évidence l'importance de la position du correcteur. En effet, lorsqu'il possède une intégration, il doit être placé avant le point* ***d'injection de la perturbation****, afin d'assurer l'élimination de l'erreur statique en régulation.*

Références bibliographiques :

- **N. BENNIS**, Automatique linéaire continue – MAROC : TOUBKAL et IGA, 2006
- **C. François**, Les grandes fonctions de la chaîne d'énergie - IUT, BTS, CPGE, FRANCE : Ellipses, 2016
- **Raymond KONN**, Commande analogique et numérique des systèmes – Éditions Ellipses, Paris, 2010.