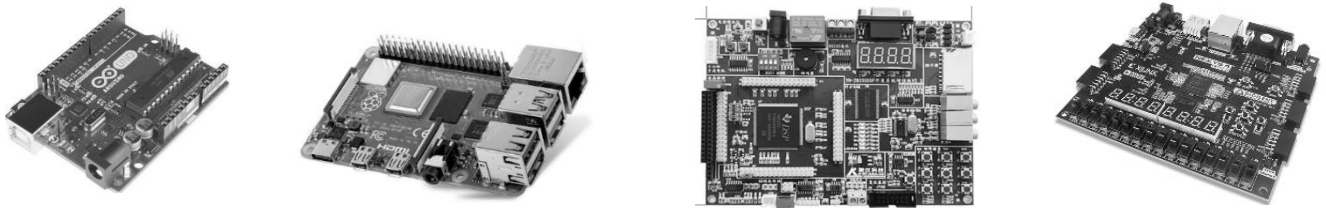


Chapitre 22 : Filtrés numériques

I. Introduction

Actuellement, la technologie de l'information numérique s'étend à tous les secteurs. Le développement de technologies programmables, telles que les microprocesseurs et les microcontrôleurs, simplifie des fonctions autrefois complexes, tout en offrant des vitesses incroyablement rapides et une précision exceptionnelle. La technologie numérique présente les avantages suivants :

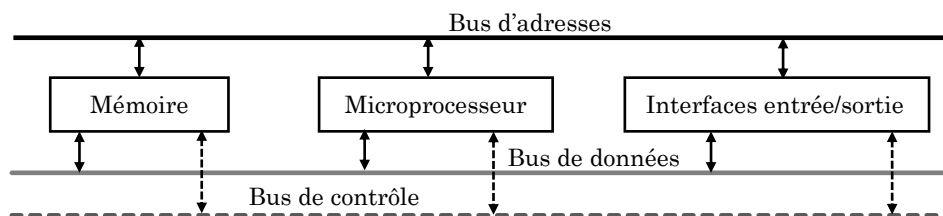
- **Immunité au bruit** : un signal codé numériquement reste insensible au bruit lors de son traitement.
- **Flexibilité** : le traitement numérique peut être facilement ajusté ou reconfiguré en cours d'utilisation.
- **Mémorisation** : la possibilité de stocker un signal facilite la création de délais et, par conséquent, d'une grande variété de filtres ou d'opérations de corrélation.



Le filtrage numérique est une opération utilisée pour traiter un signal numérique. Cette opération repose sur des calculs mathématiques qui se traduisent par une équation récurrente. Cette équation est ensuite implémentée dans un processeur de traitement de signal, tel qu'un microprocesseur (uP), un microcontrôleur (uC), un DSP (Digital Signal Processor), ou encore un FPGA (Field-Programmable Gate Array).

II. Architecture d'un système numérique

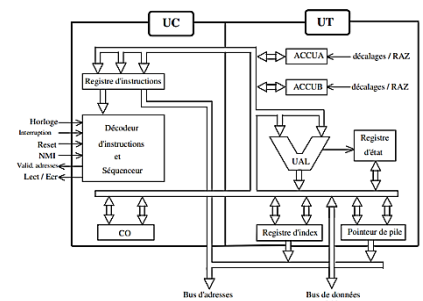
L'architecture d'un système numérique intègre des composants essentiels comme le processeur, la mémoire, les interfaces d'entrée/sortie, et les bus de communication, coordonnés pour exécuter des tâches spécifiques, souvent programmables et optimisées pour la vitesse et l'efficacité.



1. Microprocesseur

Un microprocesseur est un circuit intégré sophistiqué, considéré comme le cerveau d'un système, qui assure les fonctions principales suivantes :

- Exécution des programmes et gestion de l'adressage.
- Gestion de la communication entre la mémoire et les interfaces d'entrée/sortie.
- Réalisation d'opérations arithmétiques et logiques.



2. Mémoire

Les mémoires sont des éléments essentiels des systèmes numériques. Ce sont des composants capables de stocker des informations (données) sous forme binaire et de les restituer.



RAM		ROM				
DYNAMIQUE	STATIQUE	PROM				MASQUE
		FUSIBLE	EEPROM	UVPRM	OTP	

- **RAM** : Il s'agit de mémoires volatiles, c'est-à-dire que leur contenu est perdu lorsque l'alimentation est coupée.
- **ROM** : Il s'agit de mémoires non volatiles, ce qui signifie qu'elles conservent les informations stockées même après une coupure de l'alimentation.

3. Interfaces d'entrée/sortie

Elles permettent à l'unité centrale d'interagir avec l'environnement extérieur. On distingue deux types :

- Interfaces parallèles : elles permettent le transfert des données de manière parallèle.
- Interfaces série : elles permettent le transfert des données bit par bit, de manière séquentielle.

4. Bus de communication

Un système programmable minimum comporte trois types de bus :

- **Bus de données** : un bus bidirectionnel utilisé pour transférer les données entre le processeur et les autres composants du système, dans les deux sens.
- **Bus d'adresses** : un bus unidirectionnel permettant au processeur de sélectionner l'élément avec lequel il souhaite communiquer.
- **Bus de contrôle** : un bus qui transporte les signaux de commande et de synchronisation, permettant de gérer et coordonner les différentes opérations entre les composants du système.

III. Classification des systèmes numériques programmables

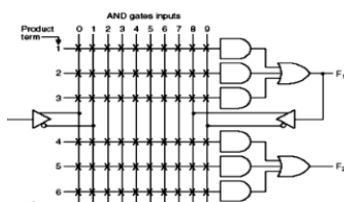
Le tableau ci-dessous présente deux principales familles de systèmes numériques programmables :

Circuits logiques programmables					Processeurs programmables		
PAL	GAL	CPLD	FPGA	ASIC	Microcontrôleur	DSP	ARM

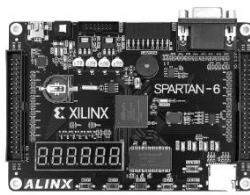
1. Circuits logiques programmables

Toute équation logique à n variables peut être exprimée sous forme de somme de produits. Pour implémenter ces équations, les circuits logiques programmables sont conçus avec une structure comprenant :

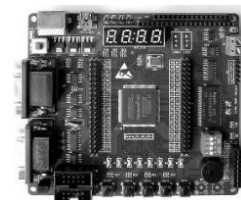
- Un réseau de portes AND, organisé en matrice, pour effectuer les opérations de produit.
- Un réseau de portes OR, également organisé en matrice, pour effectuer les opérations de somme.



Structure interne **PAL**

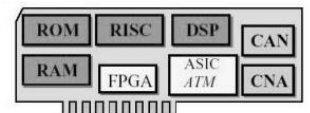


Carte **FPGA de XILINX**



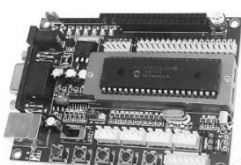
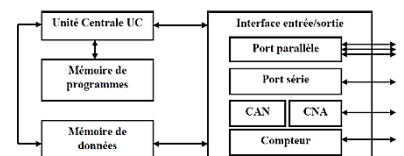
Carte **FPGA d'ALTERA**

ASIC (Application Specific Integrated Circuit) : configurés lors de leur fabrication pour une application spécifique.



2. Processeurs programmables : microcontrôleur - DSP

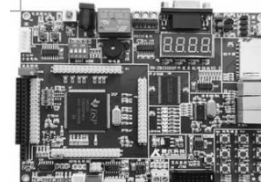
En intégrant un microprocesseur et l'ensemble des éléments d'un système minimal mémoires et interfaces d'entrée/sortie, on construit ce que l'on appelle un microcontrôleur. Un microcontrôleur rassemble sur le même circuit tous les éléments d'un système programmable minimum (et plus)



Carte **PIC**
16F877A



Carte **ARDUINO**
ATmega328P

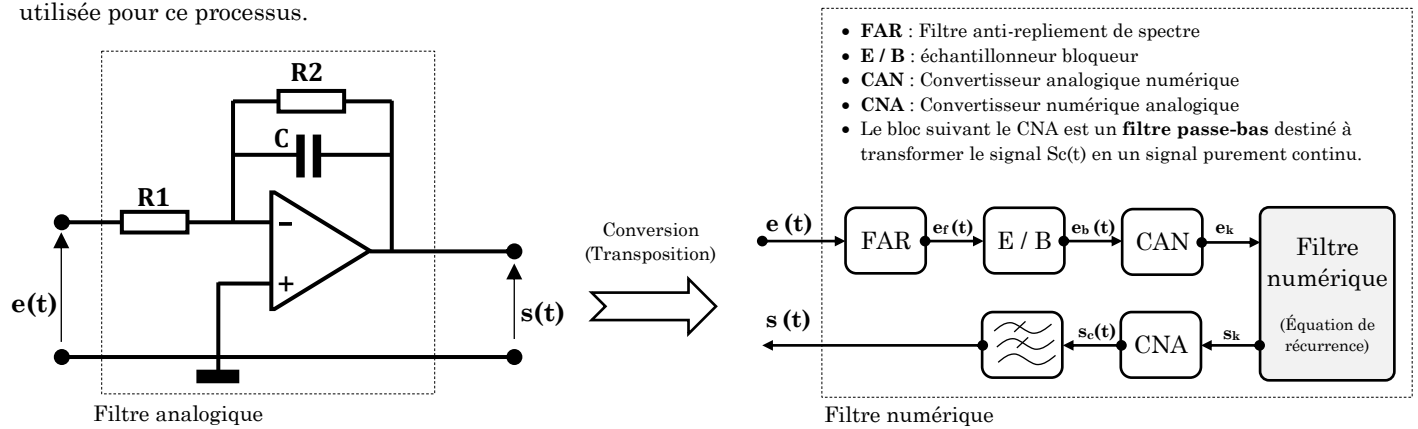


Carte **DSP**
TMS28F335

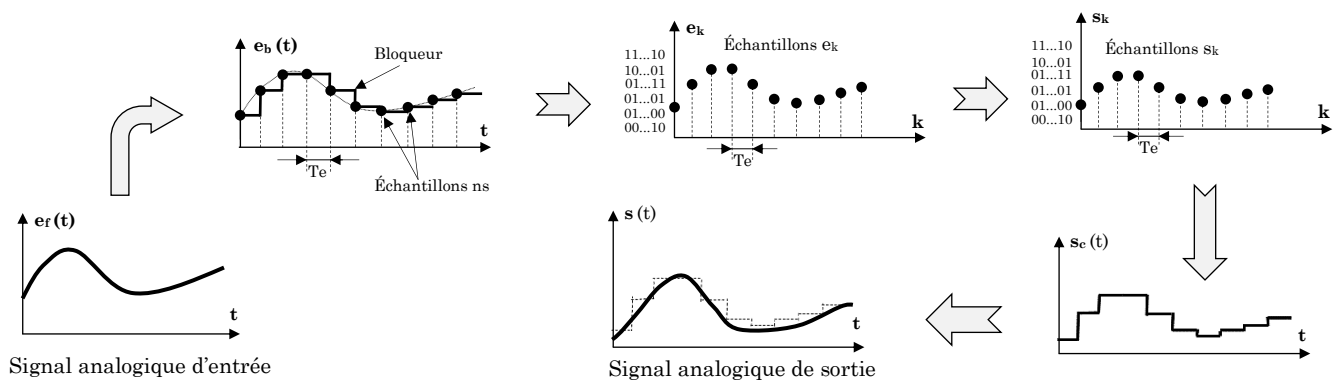
IV. Etude et analyse des filtres numériques

1. Présentation

Les filtres numériques couvrent un large éventail de domaines, remplaçant souvent les filtres analogiques. Aujourd'hui, il est préférable de convertir ces filtres analogiques en numériques pour bénéficier de leur flexibilité et précision. La méthode de transposition (Adopté dans ce cours), qui consiste à adapter un filtre analogique en version numérique, est couramment utilisée pour ce processus.



Après la limite du spectre du signal d'entrée $e(t)$ à la fréquence de Shannon-Nyquist $F_e/2$, les signaux des différents blocs du filtre numérique sont illustrés dans la figure suivante :



2. Avantages et inconvénients des filtres numériques

	Avantage	Inconvénient
Insensibilité au bruit, à l'humidité, et à la dégradation des composants au fil du temps.	✗	
Conception de filtres d'ordre très élevé.	✓	
Temps de conception long, entraînant des coûts élevés.		✗
Génération de bruit numérique nécessitant un filtrage passe-bas analogique en sortie.		✗
Besoin d'un système de calcul puissant pour assurer une rapidité de traitement.		✗

3. Présentation mathématique d'un filtre numérique

Un filtre numérique est un système discret défini par une équation de récurrence suivante :

$$s_k = \sum_{i=0}^N a_i e_{(k-i)} - \sum_{j=1}^N b_j s_{(k-j)}$$

Avec :

- $e_{(k-i)}$: l'échantillon de l'entrée au moment $k \cdot T_e$, fourni par le CNA (échantillons générés par le CAN)
- $s_{(k-j)}$: l'échantillon de la sortie au moment $k \cdot T_e$.
- a_i, b_j : coefficients à déterminer pour le filtre à concevoir.

Il existe deux grandes familles de filtres numériques : les filtres non récursifs (RIF) et les filtres récursifs (IIR).

3.1. Filtre non récursif RIF

Dans les filtres non récursifs, les coefficients b_k sont nuls. La sortie à l'instant k . s_k dépend uniquement des valeurs connues des échantillons d'entrée : $s_k = \sum_{i=0}^N a_i e_{(k-i)}$

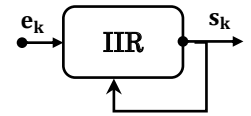
Ces filtres, appelés filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF), sont toujours stables.



3.2. Filtre récursif IIR

Dans les filtres récursifs, la sortie à l'instant k . s_k dépend à la fois des échantillons d'entrée et des échantillons des sorties précédentes : $s_k = \sum_{i=0}^N a_i e_{(k-i)} - \sum_{j=1}^N b_j s_{(k-j)}$

Ces filtres, appelés filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR), sont plus simples à calculer, mais peuvent présenter des risques d'instabilité.



Dans ce chapitre, nous nous concentrerons exclusivement sur **les filtres récursifs IIR**. La conception et la mise en œuvre de ces filtres suivront la méthodologie suivante :

- Modélisation du filtre numérique par **transposition** des filtres analogiques en numérique ;
- Synthèse des filtres numériques basée sur une **équation de récurrence** ;
- Réalisation des filtres numériques à l'aide d'un algorithme ou de composants électroniques numériques.

V. Synthèse des filtres IIR

1. Présentation

Ce type de filtre est beaucoup plus simple à calculer. Il s'agit de transposer des filtres analogiques en filtres numériques, en utilisant certaines méthodes de conversion que nous détaillerons par la suite. Toutefois, l'instabilité devient un problème majeur à mesure que l'ordre n du filtre augmente.

Remarque : Pour simplifier l'étude, nous nous appuierons sur un filtre passe-bas analogique de premier ordre, auquel nous appliquerons les traitements nécessaires pour obtenir l'équation de récurrence finale.

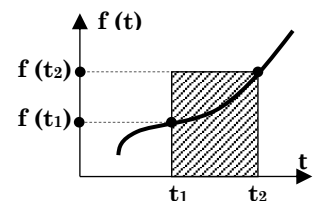
2. Transposition des filtres numériques

Il existe plusieurs méthodes d'approximation, chacune avec ses propres avantages et inconvénients en termes de précision, d'efficacité et de mise en œuvre. Le choix de l'une de ces méthodes peut affecter la validité des résultats en ce qui concerne la performance. Dans ce cours, nous nous limiterons à l'approximation par **la méthode d'Euler explicite**.

➤ Méthode d'Euler explicite (également appelée parfois méthode des rectangles)

Si l'intervalle $t_2 - t_1$ est suffisamment petit, on peut estimer l'intégrale d'une fonction entre t_1 et t_2 en utilisant l'aire d'un rectangle.

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = (t_2 - t_1) \cdot f(t_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df(t)}{dt} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$



En numérisation, $f(t)$ représente (par exemple) le signal d'entrée $e(t)$, $f(t_2)$ correspond à l'échantillon actuel e_k , $f(t_1)$ représente l'échantillon précédent e_{k-1} , et $t_2 - t_1$ est le temps d'échantillonnage T_e , qui doit respecter la condition de Shannon, à savoir $F_e > 2 \cdot F_M$ est la fréquence maximale du signal à échantillonner. Ainsi, pour la dérivée $\frac{dx(t)}{dt}$, on a l'approximation discrète :

- La dérivée : $\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x_k - x_{(k-1)}}{T_e}$
 - Une grandeur : $x(t) \approx x_k$

3. Équation de récurrence d'un filtre passe-bas récursif du premier ordre (IIR)

Dans un premier temps, en partant d'un filtre passe-bas passif de premier ordre, notre objectif est de déterminer la fonction de transfert, puis d'établir une équation différentielle. Ensuite, en appliquant la méthode de transposition décrite précédemment, nous aboutirons finalement à l'équation de récurrence.

3.1. Fonction de transfert du filtre analogique

Le schéma ci-dessous illustre un filtre passe-bas analogique de premier ordre :

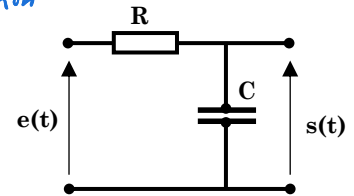
- **Question 1** : exprimer la fonction de transfert et la mettre sous la forme canonique : $H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}$

⇒ Expression de S en fonction de E , R et C : On a d'après le diviseur de tension

$$S(j\omega) = E(j\omega) \times \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \Rightarrow S(j\omega) = E(j\omega) \times \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

⇒ La fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} : H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$

⇒ La constante de temps $\tau : \omega_0 = \frac{1}{RC} \rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_0} \Rightarrow \tau = RC$



3.2. Equation différentielle du filtre

En approximant l'expression suivante et en négligeant toutes les conditions initiales, on obtient : $j\omega X \approx \frac{dx(t)}{dt}$. Cela montre que dans le domaine fréquentiel, la multiplication par $j\omega$ est équivalente à la dérivation dans le domaine temporel.

- **Question 2** : En utilisant cette approximation, exprimez l'équation différentielle sous la forme suivante :

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = k e(t), \text{ que vaut les expressions de } T \text{ et } k ?$$

$$(1 + j\tau\omega) S(j\omega) = E(j\omega)$$

$$\Rightarrow \tau j\omega S(j\omega) + S(j\omega) = E(j\omega)$$

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

$$\text{donc : } k=1 ; T=\tau=RC$$

3.3. Equation de récurrence du filtre passe-bas premier ordre

Cette étape consiste à convertir le filtre analogique en filtre numérique en appliquant l'approximation de la méthode d'Euler explicite, comme mentionné précédemment, à l'équation différentielle trouvée.

- **Question 3** : En appliquant l'approximation d'Euler explicite, démontrer que l'équation de récurrence du filtre peut être exprimée sous la forme suivante : $s_k = a_0 \cdot e_k + b_1 \cdot s_{k-1}$.

Identifier les coefficients du filtre a_0 et b_1 en fonction de T , T_e et K .

- ⇒ La dérivée : $\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$
 ⇒ Une grandeur : $x(t) \approx x_k$

$$\text{on a : } T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t)$$

$$\frac{T}{T_e} (s_k - s_{k-1}) + s_k = k \cdot e_k$$

$$\frac{T}{T_e} s_k - \frac{T}{T_e} s_{k-1} + s_k = k \cdot e_k$$

$$s_k \left(1 + \frac{T}{T_e}\right) = k e_k + \frac{T}{T_e} s_{k-1}$$

$$\text{donc : } s_k = \underbrace{\frac{k \cdot T_e}{T_e + T}}_{a_0} e_k + \underbrace{\frac{T}{T_e + T}}_{b_1} s_{k-1}$$

$$\text{avec : } a_0 = \frac{k T_e}{T_e + T} \text{ et } b_1 = \frac{T}{T_e + T}$$

3.4. Réalisation du filtre passe-bas premier ordre

Algorithme : (Nom : filtre numérique passe bas)

Variables :

$a_0, b_1, sn, sn1, en$: réelles
 $a_0 = 0.25, b_1 = 0.5$;

E en entrée ;
 S en sortie ;

● Début :

Lire l'entrée : $en \leftarrow E$;

Calculer :

$sn \leftarrow (a_0 * en) + (b_1 * sn1)$;

Ecrire à la sortie : $S \leftarrow sn$;

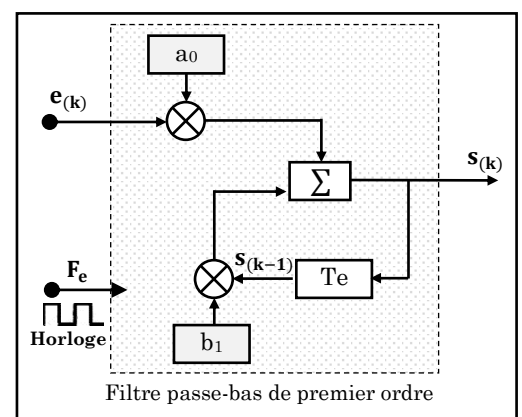
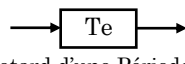
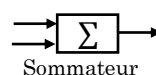
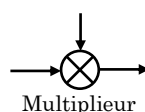
Sauvegarder :

$sn1 = sn$;

Attendre la fin de T_e ;

● Aller au début.

Blocs fonctionnels utilisés



4. Équation de récurrence d'un filtre passe-bas récursif du deuxième ordre (IIR)

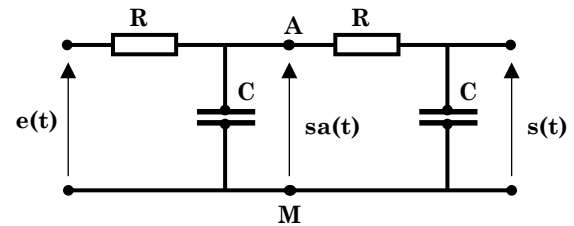
4.1. Fonction de transfert du filtre analogique

Le schéma ci-dessous illustre un filtre passe-bas analogique de deuxième ordre et sa fonction de transfert canonique s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{K}{1 + 2m j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

En appliquant le théorème de MILMAN au point A, puis en utilisant le diviseur de tension à la sortie, comme expliqué dans le chapitre 20, nous avons obtenu la fonction de transfert suivante :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 3 j R C \omega + (j R C \omega)^2} \quad \text{Avec : } K = 1, m = 1,5 \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{R \cdot C}$$



4.2. Equation différentielle du filtre

En approximant l'expression suivante et en négligeant toutes les conditions initiales, on obtient : $j\omega \underline{X} \approx \frac{d\underline{x(t)}}{dt}$, Cela montre que dans le domaine fréquentiel, la multiplication par $j\omega$ est équivalente à la dérivation dans le domaine temporel.

Après tous les calculs effectués, nous obtenons : $\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$

4.3. Equation de récurrence du filtre passe-bas deuxième ordre

L'algorithme du filtre numérique (équation de récurrence) sera obtenu sans utiliser la transformée en Z (non abordée en CPGE), mais par discrétisation de l'équation différentielle du filtre. Les calculs, réalisés via la méthode d'Euler explicite, sont complexes et aboutissent aux résultats suivants : $s_{(k)} = a_0 \cdot e_{(k)} + b_1 \cdot s_{(k-1)} + b_2 \cdot s_{(k-2)}$.

- La dérivée seconde : $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \approx \frac{x_{(k)} - 2x_{(k-1)} + x_{(k-2)}}{Te^2}$
- La dérivée première : $\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x_{(k)} - x_{(k-1)}}{Te}$
- Une grandeur : $x(t) \approx x_k$

Les coefficients du filtre passe-bas de deuxième ordre obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous :

$a_0 = \frac{\omega_0^2 \cdot Te^2 \cdot K}{1 + 2m \cdot \omega_0 \cdot Te + \omega_0^2 \cdot Te^2}$	$b_1 = \frac{2 + 2m \cdot \omega_0 \cdot Te}{1 + 2m \cdot \omega_0 \cdot Te + \omega_0^2 \cdot Te^2}$	$b_2 = -\frac{1}{1 + 2m \cdot \omega_0 \cdot Te + \omega_0^2 \cdot Te^2}$
--	---	---

Remarque : Pour les filtres d'ordre deux ou plus, il est préférable d'utiliser la transformée en Z au lieu de passage par la transposition par des équation différentielle, car elle simplifie les calculs complexes et lourds, rendant le processus plus efficace.

4.4. Réalisation du filtre passe-bas deuxième ordre

Algorithme : (Nom : filtre numérique passe bas)

Variables :

$a_0, b_1, b_2, sn, sn1, sn2, en$: réelles
 $a_0 = 0.25, b_1 = 0.5, b_2 = 0.05$;

E en entrée ;

S en sortie ;

● Début :

Lire l'entrée : $en \leq E$;

Calculer :

$sn \leftarrow (a_0 \cdot en) + (b_1 \cdot sn1) - (b_2 \cdot sn2)$;

Ecrire à la sortie : $S \leftarrow sn$;

Sauvegarder :

$sn2 = sn1$;

$sn1 = sn$;

Attendre la fin de Te ;

● Aller au début.

