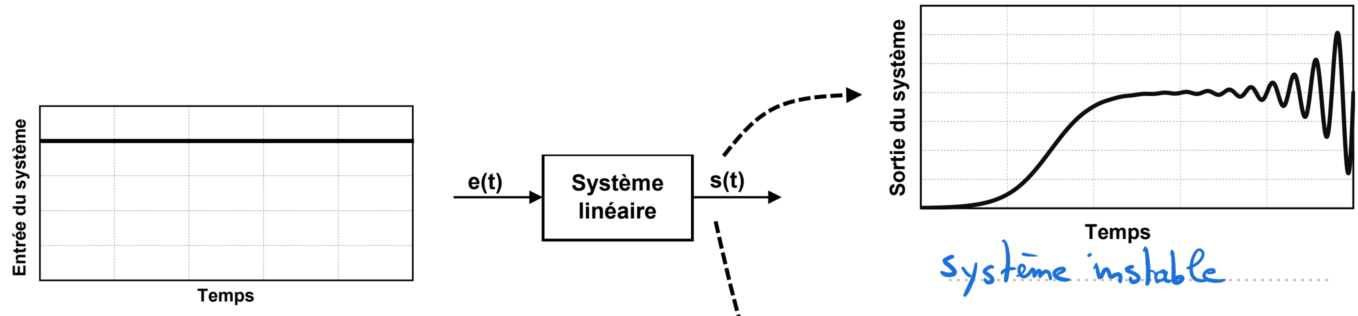
Chapitre 1 : Stabilité des systèmes asservis

I. Introduction

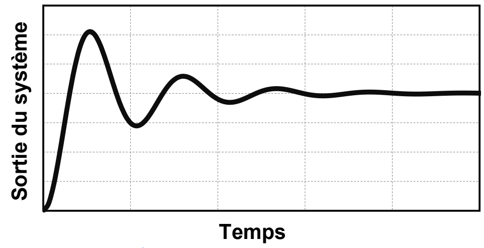
La stabilité constitue un critère fondamental dans l'analyse des systèmes asservis. Elle désigne la capacité du système à réagir de manière contrôlée à toute perturbation ou commande, garantissant une sortie bornée pour une entrée bornée. Un système instable peut entraîner des réponses divergentes, rendant son comportement imprévisible et inadéquat pour un fonctionnement fiable.

La stabilité peut être définie simplement comme la capacité d'un système à produire une sortie bornée lorsque l'entrée est bornée.



système instable

Deux approches d'étude sont envisageables, selon que l'on analyse la Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) du système ou la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO).



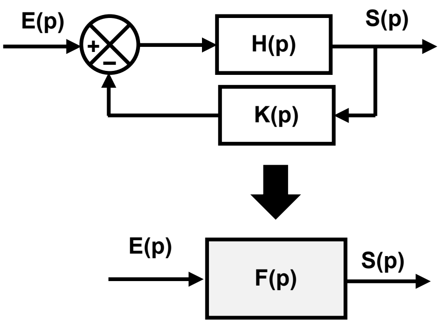
système stable

II. Analyse de la Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)

L'analyse de la stabilité d'un système asservi peut se faire en étudiant les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée (FTBF). La position de ces pôles permet de déterminer si le système est stable ou non.

1. Les pôles d'un système en boucle fermée

Considérons le schéma fonctionnel d'un système de commande en boucle fermée. La fonction de transfert en boucle fermée, notée **F(p)**, s'exprime comme suit :



On a : $F(p) = \dfrac{H(p)}{1 + FTBO(p)}$ avec : $FTBO = K(p).H(p)$

d'où : $F(p) = \dfrac{H(p)}{1 + K(p).H(p)}$

On peut également exprimer la fonction de transfert en boucle fermée sous la forme suivante : $\mathbf{F(p)} = \frac{N(p)}{D(p)}$ $\begin{cases} N(p) = H(p) \\ D(p) = 1 + FTBO \end{cases}$

Où **D(p)** représente le dénominateur de la fonction de transfert.

Les pôles de F(p) sont les valeurs de p qui annulent D(p), soit : $\mathbf{p = a + j\,b}$

où $\boldsymbol{a} = \mathfrak{Re}(\boldsymbol{p})$ est la partie réelle du pôle, et $\mathbf{b} = \mathfrak{Im}(\mathbf{p})$ sa partie imaginaire.

☑ **Application au système 1er et 2ème ordre**

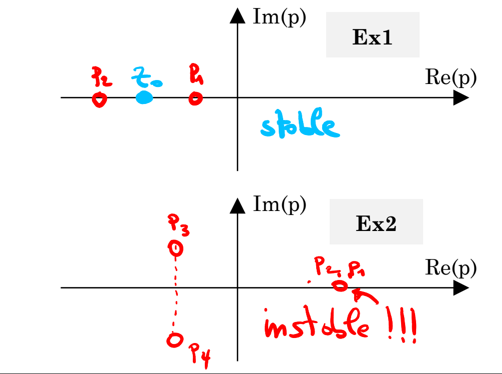
	Système premier ordre	Système second ordre ($m < 1$ et $\omega > 0$)
Fonction de transfert	$F(p) = \dfrac{K}{1 + \tau p}$	$F(p) = \dfrac{K}{1 + \frac{2m}{\omega n} p + \frac{1}{\omega n^2} p^2}$
Pôles du système	$1 + \tau p = 0$ ↳ $p = -\frac{1}{\tau}$	$\begin{cases} p1 = -m\,\omega n - j\omega n\sqrt{1 - m^2} \\ p2 = -m\,\omega n + j\omega n\sqrt{1 - m^2} \end{cases}$
Partie réelle des pôles	$R_e(p) = -\frac{1}{\tau}$	$R(p_1) = R(p_2) = -m.\omega_n$

2. Critères de stabilité d'un système en boucle fermée : analyse des pôles

La stabilité d'un système, quel que soit son ordre, peut être évaluée en analysant la position de ses pôles, selon le critère suivant :

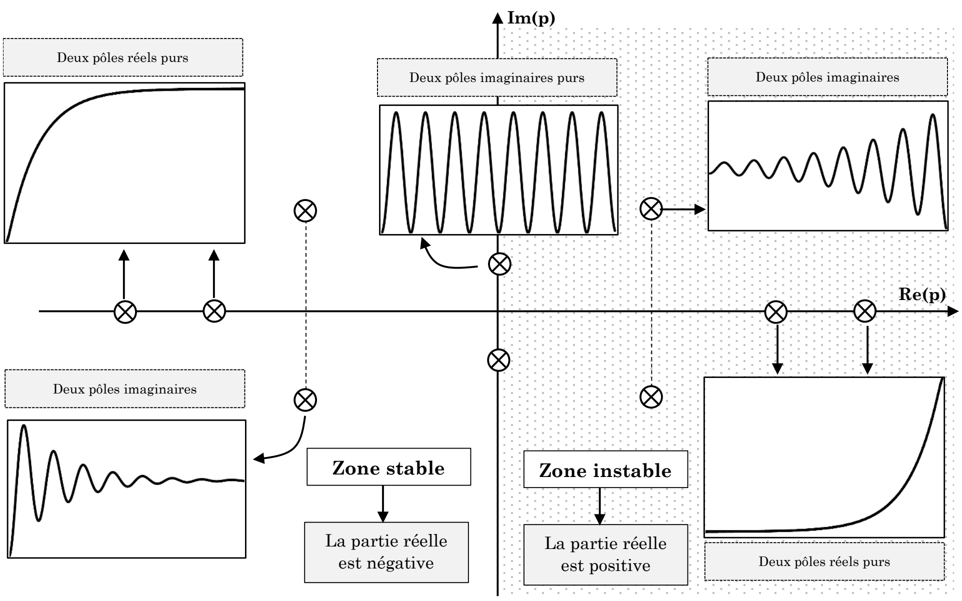
> *Un système linéaire est stable si, et seulement si, tous les pôles de sa fonction de transfert possèdent une partie réelle strictement négative, c'est-à-dire :* $\mathfrak{Re}\,(p) < 0$.

Pour mieux illustrer cette notion, examinons en détail les deux exemples suivants :

	Exemple 1 : ordre 2	Exemple 2 : ordre 4	Position des pôles(x) et des zéros (o)
Fonction de transfert	$F(p) = \dfrac{6(p+3)}{(p+2)(p+4)}$	$F(p) = \dfrac{3}{(p-1)^2(p^2+p+1)}$	
Pôles et Zéros (solutions de numérateur)	* Zéros : $p+3=0 \Rightarrow z = -3$ * pôles $(p+2)(p+4)=0$ $\begin{cases} p_1 = -2 \\ p_2 = -4 \end{cases}$	* Pôles + $p_1 = 1$ + $p_2 = 1$ + $p_3 = -0.5 + 0.87j$ + $p_4 = -0.5 - 0.87j$	
Système stable ou instable	système stable car $R(p_1)<0$, $R_e(p_2)<0$	système st instable car $R_e(p_1)>0$	

3. Allure de la réponse transitoire en fonction de la position des pôles

Il est souvent utile de connaître le comportement transitoire d'un système. Pour cela, on peut se référer au graphique suivant, qui relie la position des pôles à la forme de la réponse (**cas d'un système de deuxième ordres**) :



Conclusion :

☑ La règle de stabilité basée sur la position des pôles permet de vérifier si un système est stable ou non, mais elle ne suffit pas à décrire précisément le comportement dynamique du système. En effet, un système peut présenter des oscillations importantes tout en restant stable.

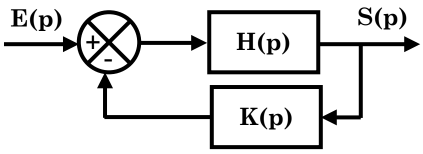
☑ Cependant, l'analyse par les pôles devient inapplicable lorsque la fonction de transfert n'est pas accessible. Dans ce cas, d'autres méthodes doivent être envisagées.

III. Analyse de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO)

1. Point critique

On considère le schéma bloc d'un système asservi illustré dans la figure ci-après :

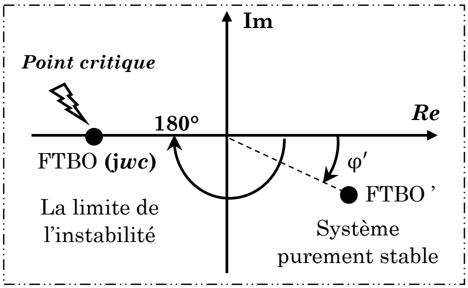
$$\mathbf{FTBF(p)} = \frac{\mathbf{H(p)}}{\mathbf{1 + K(p)\,.\,H(p)}}$$



➲ La stabilité du système dépend alors du signe de la partie réelle des racines de l'équation caractéristique : $\mathbf{1 + K(p).H(p) = 0}$

➲ Ces racines peuvent être exprimées sous la forme $\mathbf{p = a + j\,b}$. Ainsi, l'équation devient :

$$\mathbf{K(j\omega).H(j\omega) = -1 \quad \Rightarrow \quad FTBO(j\omega) = -1}$$



Le point « $\mathbf{-1}$ » sur le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) correspond à un gain unitaire ($|\mathbf{FTBO(j\omega)}| = \mathbf{1}$) et un déphasage de $-\mathbf{180°}$. Ce point est appelé **point critique** car il joue un rôle central dans l'analyse de la stabilité selon **le critère de Nyquist**.

2. Critère de stabilité

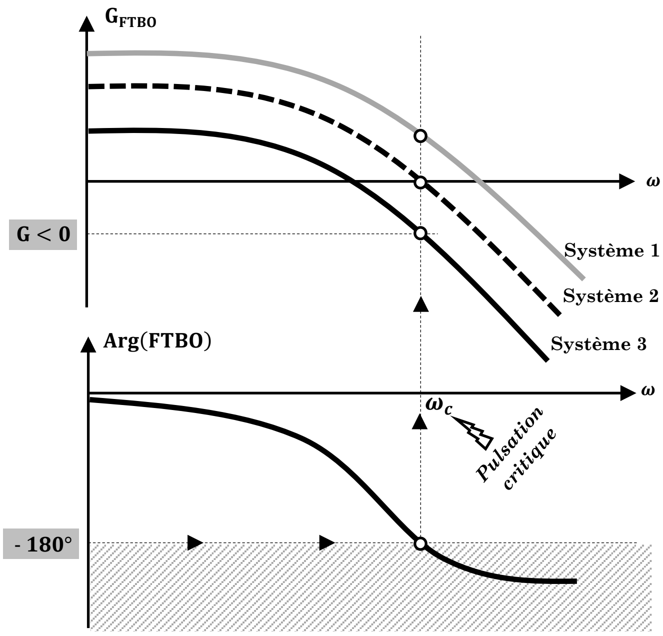
Le système sera **stable en boucle fermée** si la pulsation critique $\boldsymbol{\omega_c}$ vérifie la condition suivante :

$$\mathbf{Arg(FTBO(j\omega_c)) = -180°}$$

À cette pulsation critique, si la courbe de gain de la FTBO passe **en dessous du niveau 0 dB**, cela signifie que :

$$|\mathbf{FTBO(j\omega_c)}| < \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G_{FTBO(j\omega_c)} < 0}$$

Autrement dit, pour garantir la stabilité, **le gain de la FTBO à la pulsation où la phase atteint –180° doit être inférieur à 0 dB**.

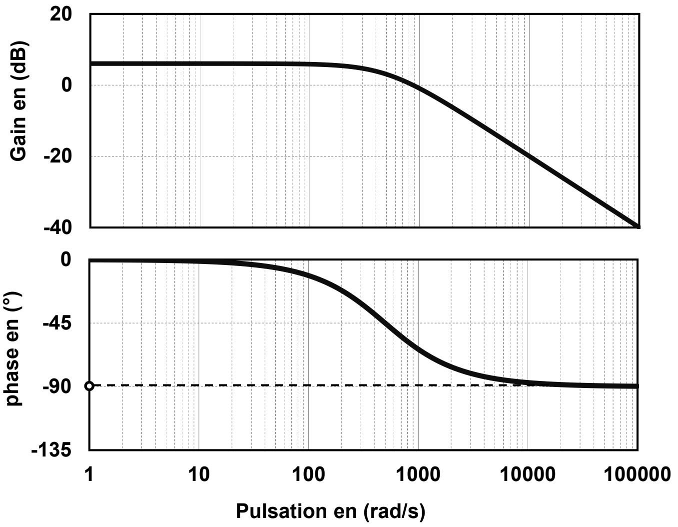


A partir des trois systèmes, on conclut que :

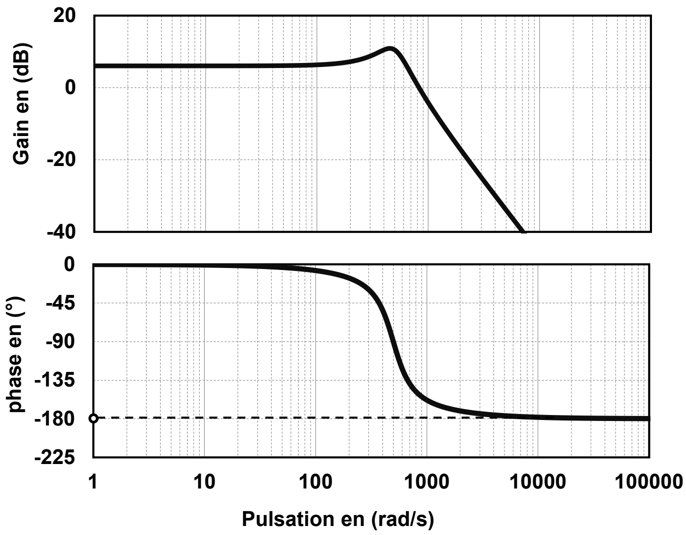
	Stable – Instable – Limite de l'instabilité
Système 1	G > 0 → système est instable
Système 2	G = 0 → système à la limite de l'instabilité
Système 3	G < 0 → système est stable .

Cas particulier :

Il est important de noter que la phase minimale d'un système du premier ordre est limitée à $\varphi = -90°$, tandis que celle d'un système du second ordre peut atteindre $\varphi = -180°$. Ainsi, selon le critère de stabilité, on peut tirer une première conclusion : ***un système du premier ordre ne peut jamais atteindre le point critique −1 en boucle ouverte, ce qui le rend intrinsèquement stable en boucle fermée.***



Système de 1er ordre



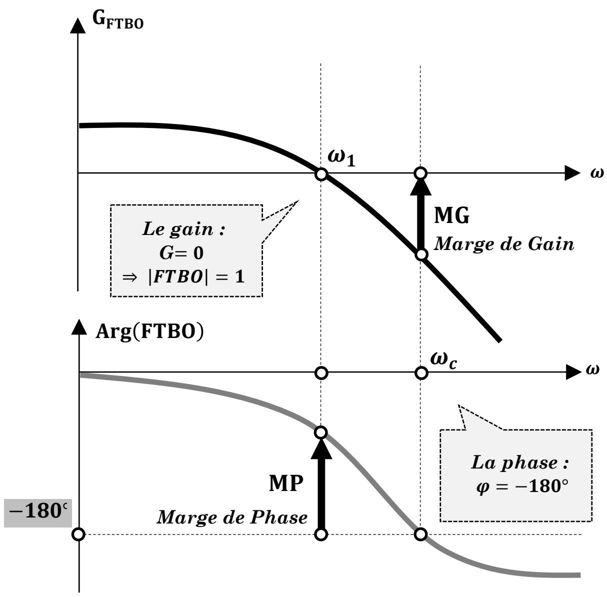
Système de 2ème ordre

3. Les marges de stabilité

Lorsqu'un système fonctionne à la limite de la stabilité, même de légères variations de ses paramètres « par exemple dues à des fluctuations de température » peuvent le faire basculer vers l'instabilité.

Pour évaluer la marge de sécurité vis-à-vis du point critique (−1), on utilise les courbes de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).

Ces courbes permettent d'appliquer deux critères complémentaires : **la marge de gain** et **la marge de phase**, qui quantifient respectivement l'écart en gain ou en phase avant d'atteindre l'instabilité.



☑ Marge de gain MG

C'est la distance en dB du point critique **(– 180° ; 0 dB)** au point d'intersection du diagramme de Bode avec la droite **ϕ = – 180°**. On note ω_C la pulsation (critique) pour laquelle : $\mathbf{Arg\,[\,FTBO(j\,\omega_C)\,] = -180°}$.

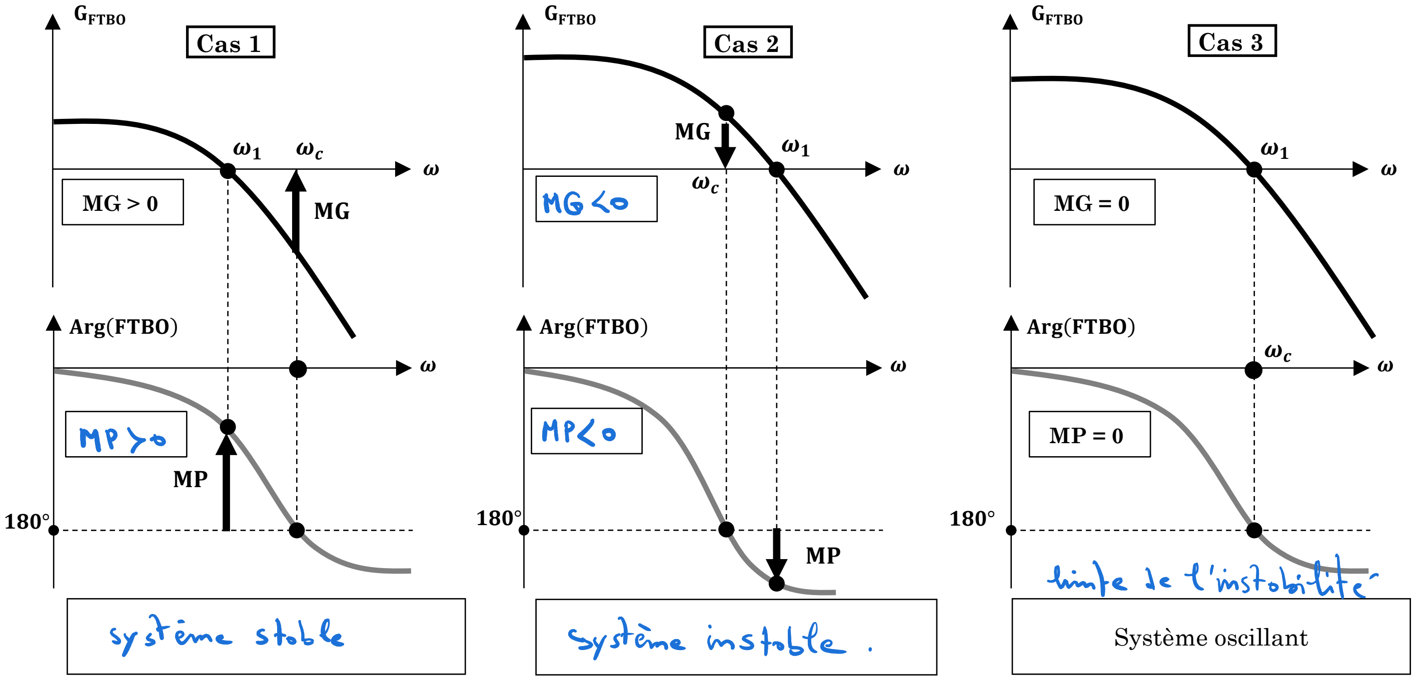
$$\begin{cases} \mathbf{MG = 0 - 20\log_{10}(|\,FTBO(j\,\omega_C)|)} \\ \mathbf{\omega_C \;/\; Arg\,[\,FTBO(j\,\omega_C)\,] = -180°} \end{cases}$$

☑ Marge de phase MP

C'est la distance en degrés du point critique (**– 180° ; 0 dB**) au point d'intersection du diagramme de Bode avec la droite **G = 0** dB. On note $\boldsymbol{\omega_1}$ la pulsation (au "gain" unité «1 ») pour laquelle : $|\,\mathrm{FTBO}(j\,\omega_1)\,| = 1\ (0\ dB)$.

$$\begin{cases} \mathbf{MP = Arg\,[\,FTBO(j\,\omega_1)\,] - (-180)} \\ \mathbf{\omega_1\ /\ |\,FTBO(j\,\omega_1)\,| = 1} \end{cases}$$

Afin de mieux comprendre les concepts de stabilité, examinons les trois cas suivants.



Une marge de gain ou de phase positive maintient la stabilité d'un système, préservant son équilibre.

Dans ce troisième cas, il apparaît clairement que garantir des marges de gain et de phase suffisantes est essentiel pour renforcer la robustesse du système. En effet, de légères variations des paramètres peuvent suffire à provoquer l'instabilité. En pratique, on recommande généralement :

- Une marge de gain comprise entre **10 dB** et **15 dB**,
- Une marge de phase située entre **40°** et **45°**.

Ces valeurs offrent un bon compromis entre performance dynamique et sécurité vis-à-vis des incertitudes du modèle ou des perturbations extérieures.

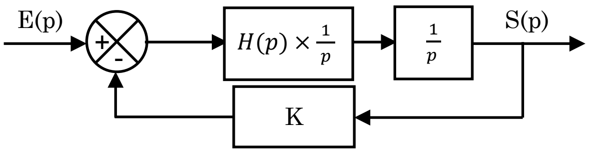
Cas particuliers

- Les systèmes du premier et du deuxième ordre, lorsqu'ils sont mis en boucle fermée et exprimés sous leurs formes standards, restent intrinsèquement stables. En effet, leur fonction de transfert en boucle ouverte n'atteint jamais un déphasage de −180°, ce qui les empêche d'atteindre le point critique et donc de devenir instables.

	Système 1er ordre	**Système 2ème ordre**
Marge de gain	$MG \to +\infty$	$MG \to +\infty$
Marge de phase	$MP > 0$	$MP > 0$

- Lorsqu'un intégrateur est présent dans la boucle ouverte, il introduit un déphasage de −90°, ce qui rapproche la courbe de phase du point critique (−180∘,0 dB) et augmente ainsi le risque d'instabilité.

  En effet, si la boucle ouverte comporte déjà une fonction intégration, ajouter un intégrateur supplémentaire (de type $\frac{1}{p}$) « ***souvent pour améliorer la précision en régime permanent*** » modifie davantage la phase de la FTBO. Ce phénomène et ses implications seront développés plus en détail dans la prochaine leçon dédiée à l'intégration dans les systèmes asservis.



La phase :

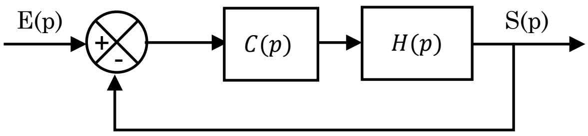
$$\varphi(j\omega) = \mathbf{Arg}\left[\frac{\mathbf{1}}{(j\omega)^2}\right] + \mathrm{Arg}\,[\,K.H(j\,\omega)\,]$$

$$\Rightarrow \varphi(j\omega) = -\mathbf{180} + \mathrm{Arg}\,[\,K.H(j\,\omega)\,] < -180$$

Système devient instable !!!!

Exemple de calcul :

On considère le schéma bloc suivante :



- **Données** : $C(p) = \frac{K_p}{p}$ et $H(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$ avec K = 2 et τ = 0.5 s
- **Cahier de charge :** Marge de phase MP = 40 °

Questions :

- **Question 1 :** Le système est-il stable ?
- **Question 2 :** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte complexe HBO(jω), puis en déduire son module et sa phase.
- **Question 3 :** Calculer la valeur du gain Kp du correcteur C(p) permettant de satisfaire l'exigence d'une marge de phase (MP) de 45°, puis en déduire la marge de gain (MG) correspondante.

Réponse :

- **Question 1 : la stabilité du système**

Commençons par déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte : $\mathbf{Hbo(p)} = \frac{\mathbf{K_p}}{\mathbf{p}} \times \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{1 + \tau.p}}$

- Cette fonction de transfert possède deux pôles : $\mathbf{P1} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{P2} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\tau}}$, ce qui indique une instabilité en boucle ouverte.
- La fonction de transfert en boucle fermée sera d'ordre deux.

Le système pourra être rendu stable en choisissant un réglage approprié du gain du correcteur Kp.

- **Question 2 : la fonction de transfert complexe : Module et phase**

On a : $\mathrm{Hbo(p)} = \frac{K_p}{p} \times \frac{K}{1 + \tau.p}$, on remplace p par jω ce qui donne : $\mathbf{HBO(j\omega)} = \frac{\mathbf{K\,.\,K_p}}{\mathbf{j\omega(1 + \tau.j\omega)}}$

- Le module |HBO(jω)| : $|\mathbf{HBO(j\omega)}| = \frac{\mathbf{K\,.\,K_p}}{\boldsymbol{\omega}\sqrt{\mathbf{1 + (\tau.\omega)^2}}}$
- La phase φ(HBO(jω)) : $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{HBO(j\omega)}) = -\mathbf{90} - \mathbf{arctg(\tau.\,\omega)}$

- **Question 3 : la valeur du gain Kp pour avoir une marge de phase MP = 40°**

Par définition : $\begin{cases} \mathbf{MP = Arg\,[\,HBO(j\,\omega_1)\,] + 180} \\ \mathbf{\omega_1 \;/\; |\,FTBO(j\,\omega_1)\,| = 1} \end{cases}$

→ On détermine tout d'abord la pulsation unitaire ω_1 à laquelle sera évaluée la marge de phase correspondante.

On a : $\mathbf{MP = Arg\,[\,HBO(j\,\omega_1)\,] + 180 = 40}$

$\rightarrow -90 - \mathrm{arctg}(\tau.\omega_1) + 180 = 40$

$\rightarrow -\mathrm{arctg}(\tau.\omega_1) + 90 = 40$

$\rightarrow -\mathrm{arctg}(\tau.\omega_1) = -50$

$\rightarrow \mathrm{arctg}(\tau.\omega_1) = 50$

D'où : $\boldsymbol{\omega_1 = \frac{tg\,(50)}{\tau}}$ **A.N :** $\mathbf{\omega_1 = 2.38\ rad/s}$

→ on calcul maintenant le gain Kp à la pulsation unitaire :

On a pour $\boldsymbol{\omega_1}$ **:** $\mathbf{|\,HBO(j\,\omega_1)\,| = 1}$ $\Rightarrow \frac{K.K_p}{\omega 1\sqrt{1+(\tau.\omega 1)^2}} = 1 \Rightarrow \mathbf{K_p = \frac{\omega 1\sqrt{1+(\tau.\omega 1)^2}}{K}}$

Ainsi, le gain Kp qui permet de garantir une marge de phase MP = 40° : $\mathbf{K_p = 1.85}$

- **La marge de gain MG**

D'après l'analyse, la phase ne parvient jamais à atteindre la valeur critique de −180°, ce qui implique que la marge de gain est infinie : **MG = + ∞**.

Références bibliographiques :

- **N. BENNIS**, Automatique linéaire continue – MAROC : TOUBKAL et IGA, 2006
- **C. François**, Les grandes fonctions de la chaîne d'énergie - IUT, BTS, CPGE, FRANCE : Ellipses, 2016
- **Raymond KONN**, Commande analogique et numérique des systèmes – Éditions Ellipses, Paris, 2010.