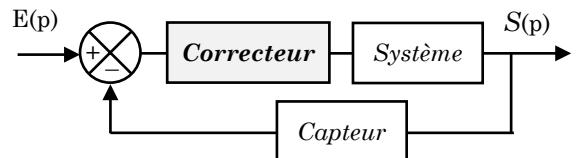


## Chapitre 3 : Correction des systèmes asservis

### I. Introduction

Les systèmes asservis peuvent souffrir de défauts de précision, de stabilité, de rapidité ou de dépassement par rapport aux spécifications. Le correcteur PID (Proportionnel-Integral-Dérivé), largement utilisé dans l'industrie, optimise les performances d'une boucle d'asservissement ou de régulation grâce à sa simplicité et son efficacité.

Le correcteur est généralement placé dans la chaîne d'action, juste après le comparateur, comme illustré sur la figure ci-dessous. Son rôle est de satisfaire les exigences du cahier des charges, liées à la stabilité, la précision et la rapidité.



Ce chapitre vise à expliquer le fonctionnement d'un correcteur PID, à déterminer la stratégie de réglage la plus appropriée pour un processus et à identifier les paramètres optimaux à l'aide de méthodes pratiques ou d'approches théoriques.

### II. Position de problème de la correction

En nous appuyant sur les chapitres précédents, nous avons dégagé des conclusions concernant la stabilité, la précision et la rapidité. Afin de bien régler le système, nous présentons ci-dessous les points essentiels, illustrés sur le diagramme de Bode.

#### ⌚ Stabilité

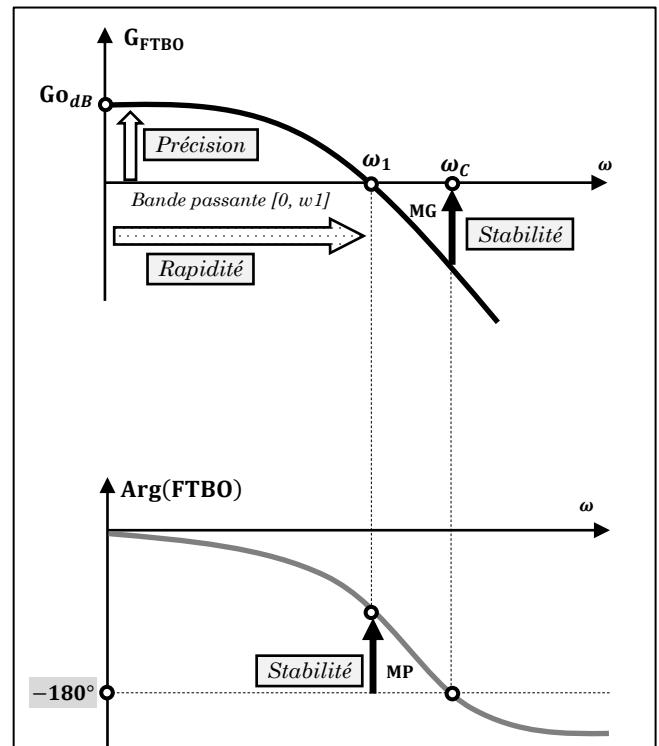
La stabilité d'un système en boucle ouverte s'analyse autour des pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_c$ . Elle est garantie lorsque **les marges de gain et de phase restent suffisamment élevées**, assurant robustesse.

#### ⌚ Rapidité

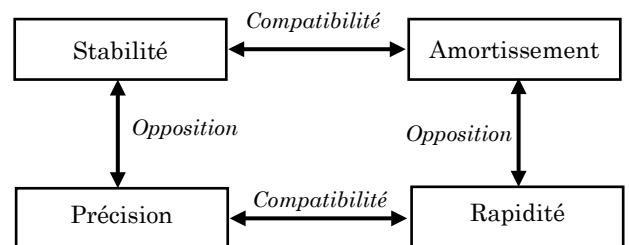
La rapidité d'un système dépend de la bande passante de la FTBO, caractérisée par la **pulsation unitaire  $\omega_1$** . Plus la **bande passante est large**, plus le système est **rapide**.

#### ⌚ Précision

La précision dépend du comportement de la FTBO aux basses fréquences, exprimé par le gain  **$G_{0dB}$** . Un système est précis si ce **gain est élevé** ou si la boucle ouverte comporte **plusieurs intégrations**.

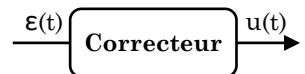


Ces trois qualités ne peuvent malheureusement pas être optimisées simultanément. Il est donc impossible de répondre parfaitement à toutes les exigences d'un cahier des charges. Les automaticiens font face à un dilemme, illustré ci-dessous : garantir une stabilité robuste (indispensable) tout en conservant une bonne précision.



### III. Structure générale d'un correcteur PID

Le correcteur est l'élément clé d'une boucle de régulation. Il traite l'écart entre la consigne et la sortie mesurée, puis élabore un signal de commande pour piloter les pré-actionneurs selon les actions suivantes :



- **Action proportionnelle (P) :**  $u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t)$   $\Rightarrow U(p) = K_p \cdot \varepsilon(p)$
- **Action intégrale (I) :**  $u(t) = \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^T \varepsilon(t) dt$   $\Rightarrow U(I) = \frac{1}{T_i \cdot p} \cdot \varepsilon(p)$
- **Action dérivée (D) :**  $u(t) = T_d \frac{d \varepsilon(t)}{dt}$   $\Rightarrow U(D) = T_d \cdot p \cdot \varepsilon(p)$

En pratique, ces actions se combinent pour former des correcteurs PI, PD ou PID.

- ⌚ **L'action P** améliore la précision et la rapidité, mais peut réduire la stabilité.
- ⌚ **L'action I** supprime l'écart statique.
- ⌚ **L'action D** stabilise le système et influe sur la vitesse (ralentissement).

Trois différentes structures de correcteurs PID sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Structure série	Structure parallèle	Structure mixte
$C(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p)$	$C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p} + T_d p$	$C(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$

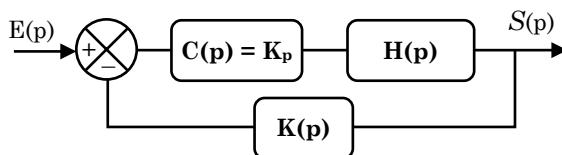
Dans ce cours, nous nous limiterons à l'étude du correcteur PID à structure mixte, en écartant les autres configurations pour simplifier l'analyse.

### IV. Étude et analyse des performances de correcteur PID

Dans cette section, nous nous intéresserons aux correcteurs P, PI et PD, très répandus dans les applications industrielles. L'objectif est d'analyser l'impact de chaque action sur les performances d'asservissement et de présenter quelques méthodes de réglage basées sur un cahier des charges.

#### 1. Correcteur proportionnel (P)

Dans ce type de correcteur, le signal de commande  $u(t)$  est proportionnel au signal d'écart  $\varepsilon(t)$  :  $u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t) \Rightarrow C(p) = K_p$



##### 1.1 – Réglage de correcteur proportionnel : $C(p) = K_p$

Pour dimensionner un correcteur proportionnel, le cahier des charges tous d'abord repose seulement la stabilité de système, il impose une marge de phase MP (entre 40° et 45°) ou la marge de gain MG (10 dB à 15 dB).

Pour mieux saisir ce réglage, prenons l'exemple d'un système dont la fonction en boucle ouverte est définie comme suit :

$$FTBO(p) = C(p) \cdot K(p) \cdot H(p) \Rightarrow FTBO(p) = \frac{K_p}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \text{ Avec } \tau_1 = 0.1s \text{ et } \tau_2 = 0.2s$$

- La fonction de transfert complexe :  $\text{FTBO}(j\omega) = \frac{K_p}{j\omega(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega)}$
- Le module et la phase de la FTBO :  $|FTBO(j\omega)| = \frac{K_p}{\omega\sqrt{(1 + (\tau_1\omega)^2)(1 + (\tau_2\omega)^2)}}$  et  $\text{Arg}(\text{FTBO}(j\omega)) = -90 - \arctg(\tau_1\omega) - \arctg(\tau_2\omega)$

Cahier des charges : la marge de phase à respecter  $MP = 45^\circ$

### ⌚ Méthode algébrique : la valeur de $K_p$ ?

- La nouvelle pulsation unitaire  $\omega_1$  à  $MP = 45^\circ$

Par définition : la marge de phase

$$\left\{ \begin{array}{l} MP = 180 + \text{Arg}[\text{FTBO}(j\omega_1)] \\ \omega_1 / |\text{FTBO}(j\omega_1)| = 1 \end{array} \right.$$

En partant de :  $MP = 180 + \text{Arg}(\text{FTBO}(j\omega_1)) = 45^\circ$ , et en remplaçant l'argument dans l'expression de la marge de phase, on obtient :  $180 - 90 - \arctg(\tau_1\omega_1) - \arctg(\tau_2\omega_1) = 45^\circ \Rightarrow \arctg(\tau_1\omega_1) + \arctg(\tau_2\omega_1) = 45^\circ$

Après les calculs, on trouve :  $\text{Arctg}\left(\frac{(\tau_1 + \tau_2)\omega_1}{1 - \tau_1\tau_2\omega_1^2}\right) = 45^\circ \Rightarrow \tau_1\omega_1^2 + (\tau_1 + \tau_2)\omega_1 - 1 = 0$

D'où la marge  $MP = 45^\circ$  se trouve à :  $\omega_1 = 2.8 \text{ rad/s}$

- La valeur de  $K_p$

Nous avons que pour  $\omega_1 \Rightarrow |\text{FTBO}(j\omega_1)| = 1$

$$\Rightarrow |\text{FTBO}(j\omega_1)| = 1 \Rightarrow \frac{K_p}{\omega_1\sqrt{(1 + (\tau_1\omega_1)^2)(1 + (\tau_2\omega_1)^2)}} = 1 \Rightarrow K_p = \omega_1\sqrt{(1 + (\tau_1\omega_1)^2)(1 + (\tau_2\omega_1)^2)}$$

Ainsi, pour satisfaire les exigences du cahier des charges, la valeur du gain proportionnel nécessaire est :  $K_p = 3.34$

### ⌚ Méthode graphique : la valeur de $K_p$ ?

Cette méthode s'applique au **diagramme de Bode du système non corrigé** (avec  $K_p = 1$ ). Pour déterminer graphiquement la valeur du gain  $K_p$  permettant d'obtenir une **marge de phase de  $45^\circ$** , on suit les étapes suivantes :

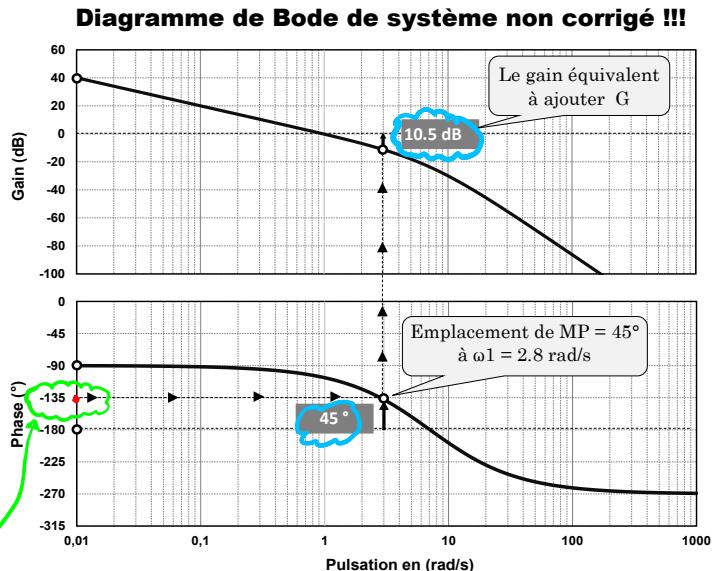
#### 1. Calcul de l'argument cible :

La marge de phase est définie par :

$$MP = 180 + \text{Arg}[\text{FTBO}(j\omega_1)]$$

En imposant  $MP = 45^\circ$ , on obtient :

$$\Rightarrow \text{Arg}(\text{FTBO}(j\omega_1)) = 45^\circ - 180^\circ = -135^\circ$$



#### 2. Lecture graphique du gain équivalent à ajouter

Sur le diagramme de gain, on repère la pulsation  $\omega_1 = 2,8 \text{ rad/s}$ , où la phase est à  $-135^\circ$ . À cette fréquence, le **gain équivalent à ajouter** lire est :  $G = 10.5 \text{ dB}$

#### 3. Calcul de $K_p$ à partir du gain équivalent à ajouter :

$$\text{On utilise la relation : } G = 20 \log(K_p) \Rightarrow \log(K_p) = \frac{G}{20} \Rightarrow$$

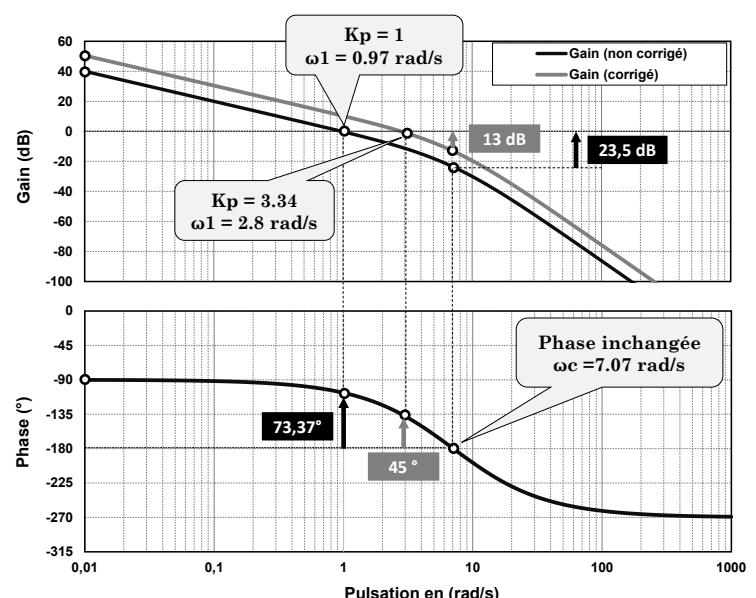
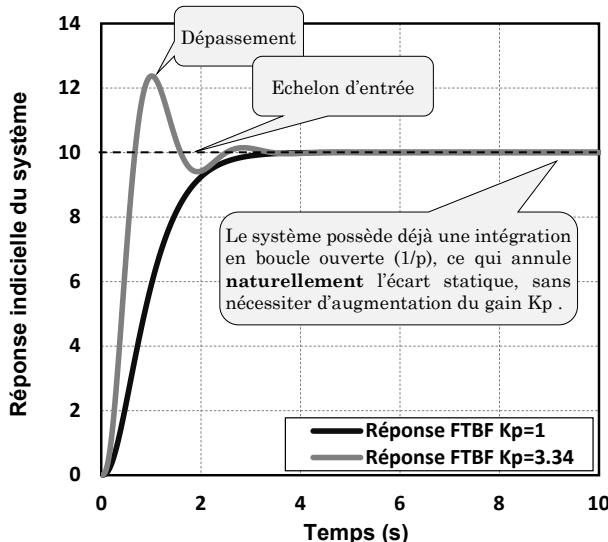
$$K_p = 10^{\frac{G}{20}}$$

En remplaçant :

$$K_p = 3.349$$

## 1.2 Analyse des résultats : utilité d'un correcteur proportionnel

Dans cette partie, nous mettons en évidence l'utilité du correcteur proportionnel, en illustrant l'impact du passage de  $K_p=1$  à  $K_p=3,34$  à partir de l'exemple précédent.



Ce tableau résume les performances d'asservissement, dans le sens d'augmentation du gain proportionnel  $K_p$  :

Caractéristique	$K_p = 1$	$K_p = 3,34$	Commentaire (augmentation de $K_p$ )
La marge de gain et de phase	MG = 23,5 dB MP = 73,37°	MG = 13 dB MP = 45°	Les marges de stabilité diminuent, ce qui entraîne une réduction de la stabilité globale.
La bande passante	BP = $\omega_1 = 0.97 \text{ rad/s}$	BP = $\omega_1 = 2.8 \text{ rad/s}$	Elle provoque une augmentation de la bande passante, ce qui améliore la rapidité de système.
Le gain en basse fréquence	$G_0 = 40 \text{ dB}$	$G_0 = 50 \text{ dB}$	Le gain en basse fréquence s'élève, permettant de réduire l'écart statique (sans pour autant l'annuler), ce qui améliore la précision.
Amortissement	Pas de dépassement $D\% = 0$	Je y a de dépassement $D\% = 22\%$	Toutefois, cette augmentation de la rapidité peut favoriser l'apparition de phénomènes d'instabilité si le système est mal dimensionné.

**Note importante :** effets du correcteur proportionnel

Le correcteur proportionnel agit sur plusieurs aspects du système :

- Il **augmente la rapidité**, ce qui peut entraîner l'**apparition d'un dépassement** dans la réponse temporelle.
- Il **améliore la précision**, mais ne permet pas **d'annuler totalement l'écart statique**.
- Il **réduit la stabilité** du système en **diminuant les marges de gain et de phase**.

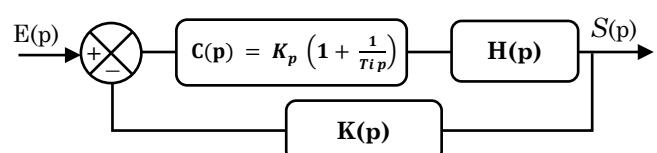
## 2. Correcteur Proportionnel – Intégral (PI)

Dans ce type de correcteur, le signal de commande  $u(t)$  est lié au signal d'écart  $\varepsilon(t)$  par :  $u(t) = K_p \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_{ip}} \cdot \int \varepsilon(t) dt \right)$  donc :

$$C(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_{ip}} \right)$$

Nous retiendrons deux méthodes de réglage d'un tel correcteur :

- Critère de **marge de phase + 6 dB**,
- Critère de **compensation du pôle dominant**.



## 2.1 Analyse de correcteur PI : Diagramme de Bode

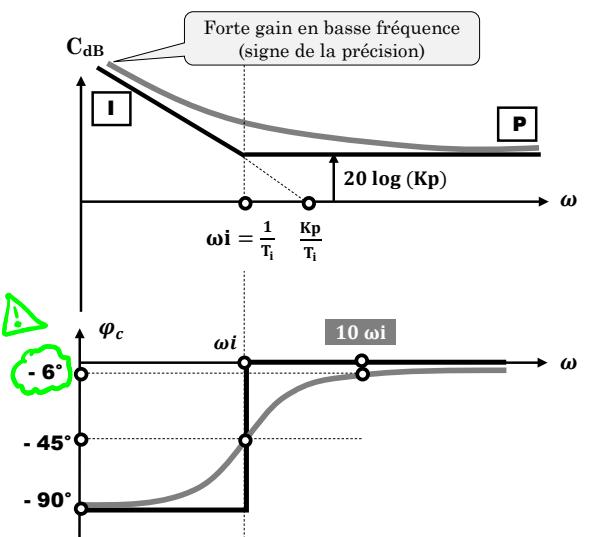
La fonction de transfert complexe du correcteur s'écrit :

$$C(j\omega) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i j\omega}\right) \Rightarrow C(j\omega) = \frac{1 + T_i j\omega}{\frac{T_i}{K_p} j\omega}$$

Ce correcteur présente les caractéristiques remarquables suivantes :

- La phase est de  $-45^\circ$  lorsque  $\omega = \omega_i$  ;
- La phase est de  $-6^\circ$  pour  $\omega = 10 \cdot \omega_i$  ;
- La phase atteint  $-84^\circ$  pour  $\omega = \omega_i / 10$ .

**Remarque :** Le fort gain à basse fréquence garantit une forte atténuation de l'erreur statique, ce qui permet d'assurer une précision optimale du système.  $\Rightarrow \varepsilon_s = 0$



## 2.2 Méthode par critère de marge de phase : calcul de Kp et Ti ?

L'objectif est de configurer le correcteur afin d'assurer une **marge de stabilité suffisante**. Pour cela, la procédure se décompose en deux étapes :

### Etape 1 : Réglage de l'action proportionnelle Kp

Commencez par ajuster le gain proportionnel  $K_p$ , en posant  $1/T_i = 0$  (c'est-à-dire sans action intégrale). L'objectif est d'obtenir une **marge de phase MP'** égale à la valeur souhaitée **MP augmentée de 6° (+6°)**, afin d'anticiper la perte de phase causée par l'intégration.

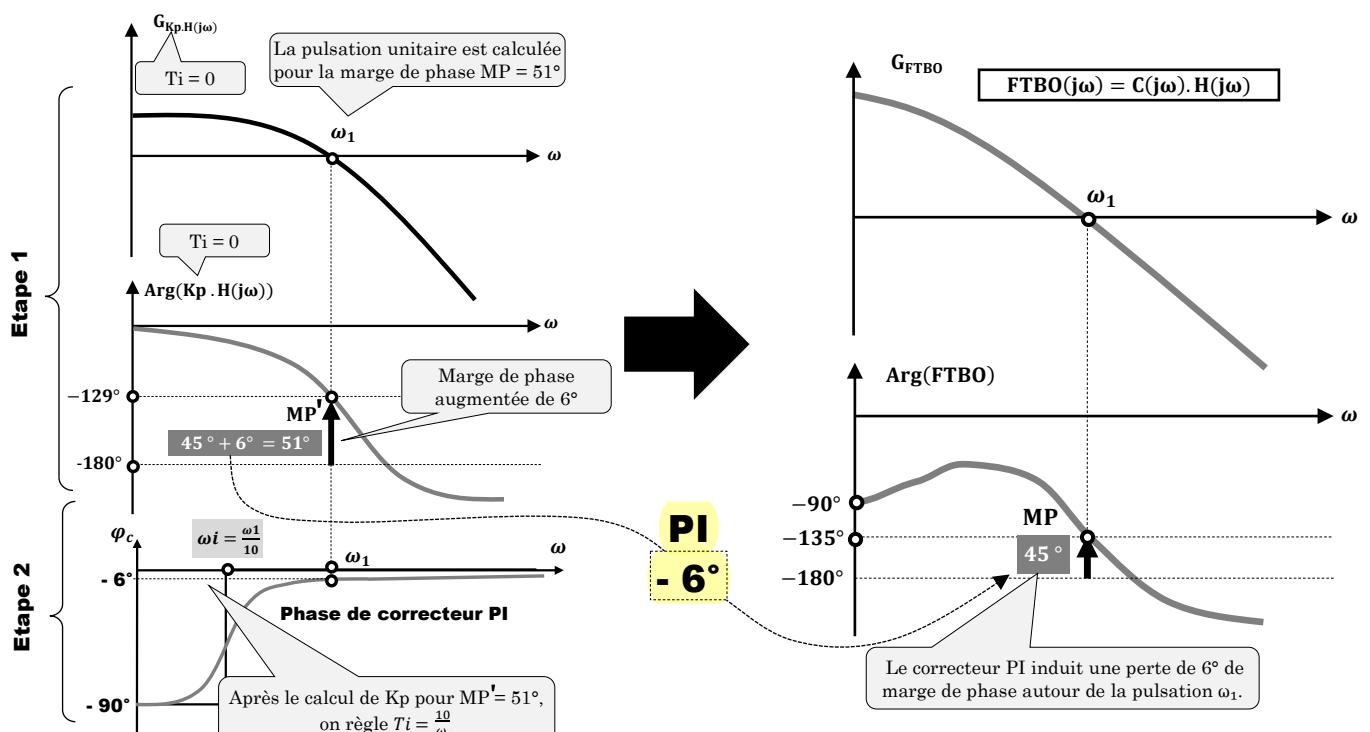
### Etape 2 : Réglage de l'action intégrale :

Ensuite, introduisez l'action intégrale en choisissant  $T_i$  selon les critères suivants :

Si la marge de phase : $MP \geq 45^\circ$	Si la marge de phase : $MP < 45^\circ$
$\omega_i = \frac{1}{T_i} = \frac{\omega_1}{10}$	$\omega_i = \frac{1}{T_i} = \frac{\omega_1}{4}$

Cette figure illustre parfaitement la stratégie de réglage.

Par exemple, si l'on vise une **marge de phase  $MP = 45^\circ$** , elle montre comment ajuster successivement l'action proportionnelle, puis l'action intégrale pour atteindre cet objectif.

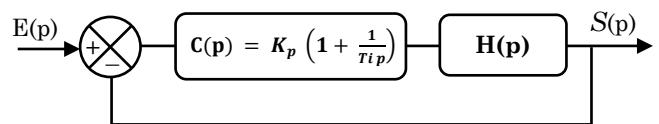


**Exemple :**

On considère un système dont la fonction de transfert est donnée par :  $H(p) = \frac{4}{1+0,24p+10^{-2}p^2}$

**Cahier des charges :**

- L'erreur statique doit être annulée.
- Le correcteur à concevoir doit permettre d'obtenir une **marge de phase** de  $45^\circ$  pour le système corrigé.



La fonction de transfert de système peut s'écrire par :  $H(p) = \frac{4}{(1+0,1864p)(1+0,0536p)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{4}{(1+0,1864 j\omega)(1+0,0536 j\omega)}$

Le module de $H(j\omega)$	La phase de $H(j\omega)$
$ H(j\omega)  = \frac{4}{\sqrt{(1+(0.1864\omega)^2)(1+(0.0536\omega)^2)}}$	$\text{Arg}(H(j\omega)) = -\arctg(0.1864\omega) - \arctg(0.0536\omega)$ $\Rightarrow \text{Arg}(H(j\omega)) = -\text{Arctg}\left(\frac{0.24\omega}{1-0.010\omega^2}\right)$

**Etape 1 : calcul du gain  $K_p$** 

Dans ce cas-là en annule la constante d'intégration :  $1/T_i = 0 \Rightarrow C(p) = K_p$

Cette méthode impose que le gain  $K_p$  est calculé de la manière à avoir une marge de phase  $MP' = 45^\circ + 6^\circ \Rightarrow MP' = 51^\circ$

- On cherche la pulsation unitaire  $\omega_1$  pour une marge de phase  $MP' = 51^\circ$ .

Par définition, la marge de phase s'exprime par :  $\begin{cases} MP' = 180 + \text{Arg}(\text{FTBO}(j\omega_1)) \\ \omega_1 / |\text{FTBO}(j\omega_1)| = 1 \end{cases}$

On a :  $MP' = 180 + \text{Arg}(\text{FTBO}(j\omega_1)) = 51^\circ$ , avec  $\text{FTBO}(j\omega) = K_p \cdot H(j\omega)$

$$\text{Donc : Arctg}\left(\frac{0.24\omega_1}{1-0.010\omega_1^2}\right) = 129 \Rightarrow \frac{0.24\omega_1}{1-0.010\omega_1^2} = t_g(129) \Rightarrow 0.010t_g(129)\omega_1^2 + 0.24\omega_1 - t_g(129) = 0$$

D'où : la marge de phase  $MP' = 51^\circ$ , se trouve à la pulsation unitaire :  $\omega_1 = 23.66 \text{ rad/s}$

- La valeur de  $K_p$

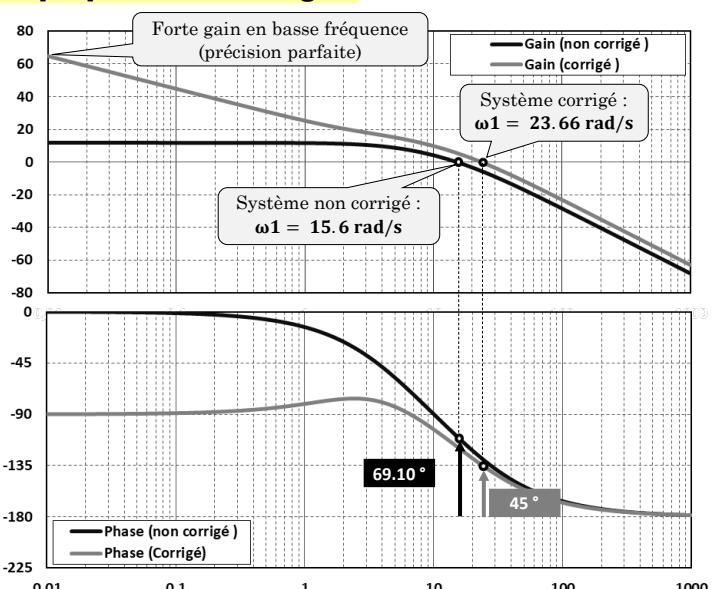
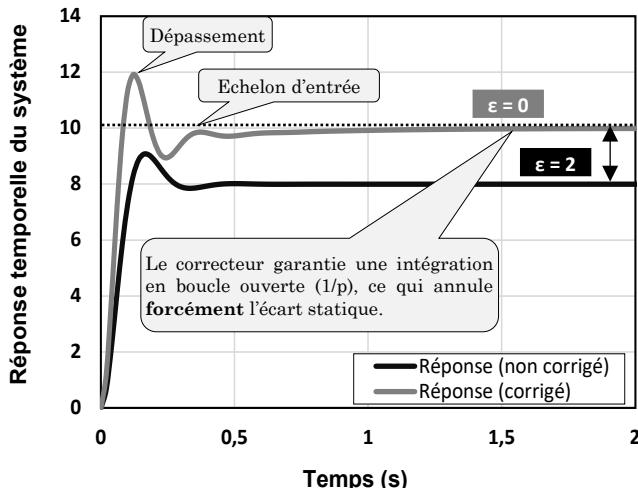
Nous avons que pour  $\omega_1 \Rightarrow |\text{FTBO}(j\omega_1)| = 1 \Rightarrow |K_p \cdot H(j\omega_1)| = 1$

$$\Rightarrow |\text{FTBO}(j\omega_1)| = 1 \Rightarrow \frac{4K_p}{\sqrt{(1+(0.1864\omega_1)^2)(1+(0.0536\omega_1)^2)}} = 1 \Rightarrow K_p = \frac{1}{4} \sqrt{(1+(0.1864\omega_1)^2)(1+(0.0536\omega_1)^2)}$$

D'où, la valeur du gain proportionnel nécessaire pour avoir  $MP' = 51^\circ$  :  $K_p = 1.82$

**Etape 2 : calcul de la constante intégrale  $T_i$** 

Puisque  $MP = 45^\circ$  (45° que l'on cherche, ce n'est pas 51° !!!), Alors :  $T_i = \frac{10}{\omega_1} \Rightarrow T_i = 0.422 \text{ s}$

**2.3 Analyse des résultats : utilité d'un correcteur proportionnel intégral**

Ce tableau résume les performances d'asservissement, dans le sens d'implémentation d'un correcteur PI.

Caractéristique	Sys. Non corrigé	Système corrigé	Commentaire (augmentation de Kp)
<b>La marge de gain et de phase</b>	MG = $+ \infty$ MP = $96.10^\circ$	MG = $+ \infty$ MP = $45^\circ$	Les marges de stabilité diminuent, ce qui entraîne une réduction de la stabilité globale.
<b>La bande passante</b>	$B_p = 15.6 \text{ rad/s}$	$B_p = 23.66 \text{ rad/s}$	Elle provoque une augmentation de la bande passante, ce qui améliore légèrement la rapidité de système.
<b>Le gain en basse fréquence</b>	$10 \text{ dB}$	$\text{élevé}$	Le gain en basse fréquence s'élève, permettant d'annuler parfaitement l'écart statique, ce qui garantit une précision parfaite.
<b>Amortissement</b>	$12\%$	20%	Toutefois, cette augmentation de la rapidité peut favoriser l'apparition de phénomènes d'instabilité si le système est mal dimensionné.

#### Note importante : Effets du correcteur proportionnel-intégral (PI)

L'introduction d'un correcteur PI a plusieurs impacts sur le comportement du système :

- ⦿ **Rapidité** : le gain proportionnel améliore légèrement la rapidité, mais peut provoquer un dépassement dans la réponse temporelle.
- ⦿ **Précision** : grâce à l'action intégrale, le correcteur annule complètement l'écart statique, assurant ainsi une précision parfaite à régime permanent.
- ⦿ **Stabilité** : l'ajout de l'intégrateur entraîne une réduction des marges de gain et de phase, ce qui diminue la stabilité globale du système.

#### 2.4 Méthode de compensation du pôle dominant

Cette méthode repose sur l'idée que la **dynamique lente du système** est dominée par le **pôle ayant la plus petite partie réelle** (ou la constante de temps la plus grande).

Elle consiste à dimensionner le correcteur **PI** de la façon suivante :

- **Action intégrale** : choisir la **pulsation de coupure de l'intégrateur** ( $\omega_i = 1/T_i$ ) égale à la **pulsation la plus faible** du système (associée au pôle dominant).
- **Action proportionnelle** : ajuster le **gain Kp** pour satisfaire la **marge de phase** imposée.

Cette technique permet de compenser la lenteur du pôle dominant tout en garantissant les critères de stabilité et de précision.

#### Exemple :

Le système est défini par la fonction de transfert en boucle ouverte suivante :

$$FTB0(p) = C(p) \cdot \frac{4}{(1 + 0,1p)(1 + 10p)}$$

**Exigences du cahier des charges :**

- Marge de phase cible : **MP =  $45^\circ$**
- Objectif : **améliorer la rapidité du système**

#### ► Choix de constante d'intégration $T_i$ :

Conformément à la méthode de compensation du pôle dominant, la constante d'intégration  $T_i$  est choisie égale à la constante de temps la plus grande du système. On prend donc :  **$T_i = 10 \text{ s}$** .

### ► Calcul Du gain K<sub>p</sub>

La fonction de transfert corrigée, après introduction du correcteur PI avec T<sub>i</sub> = 10s, s'écrit alors :  $FTB01(p) = \frac{4K_p}{10p(1 + 0.1p)}$

La fonction de transfert complexe s'écrit :

$FTB01(j\omega) = \frac{4K_p}{10j\omega(1 + 0.1j\omega)}$	Module	$ FTB01(j\omega)  = \frac{4K_p}{10\omega\sqrt{1 + (0.1\omega)^2}}$
	La phase	$\varphi(FTB01(j\omega)) = -90^\circ - \arctg(0.1\omega)$

- Étape 1 : Détermination de la pulsation  $\omega_1$  pour laquelle la marge de phase est de  $45^\circ$  :

$$MP = 180 + \text{Arg}(FTB01(j\omega_1)) = 45^\circ.$$

$$\Rightarrow 180 - 90 - \arctg(0.1\omega_1) = 45^\circ; \text{ ce qui donne : } \omega_1 = 10 \text{ rad/s}$$

- Étape 2 : Calcul du gain K<sub>p</sub> pour que le module de la FTB01 soit unitaire à  $\omega_1$  :

$$\text{Calculons } K_p \text{ à } \omega_1, \text{ tel que : } |FTB01(j\omega_1)| = 1 \rightarrow \frac{4K_p}{10\omega_1\sqrt{1 + (0.1\omega_1)^2}} = 1$$

$$\text{D'où : } K_p = \frac{1}{4} \times 10 \times \sqrt{1 + (0.1 \times 10)^2} \Rightarrow K_p = 35.35$$

- Correcteur PI obtenu :  $C(p) = 35.35 \left( 1 + \frac{1}{10p} \right)$

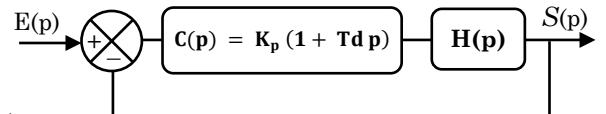
### 3. Correcteur proportionnel dérivé (PD)

Dans ce type de correcteur, le signal de commande u(t) est lié au signal d'écart  $\varepsilon(t)$  par :  $(t) = K_p \left( \varepsilon(t) + Td \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)$  donc :

$$C(p) = K_p (1 + Td p)$$

Objectifs visés autour de la pulsation de coupure  $\omega_1$  :

- Améliorer la stabilité si la marge de phase est insuffisante.
- Améliorer la rapidité du système sans compromettre sa stabilité.



**Remarque importante !!!** : Le correcteur PD, du fait de la dérivation pure, peut être **non causal**. En pratique, on y ajoute un **filtre passe-bas** pour obtenir un correcteur à **avance de phase**, permettant d'**augmenter la phase** tout en assurant la **causalité** du système.

#### 3.1 Analyse d'un correcteur à avance de phase

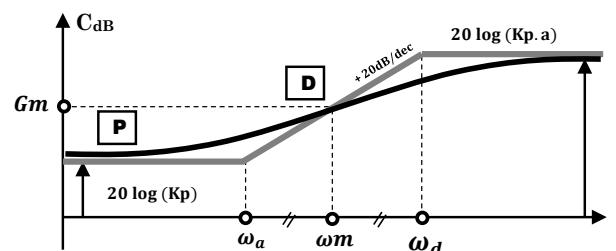
Le correcteur à avance de phase est défini par la fonction de transfert suivant :  $C(p) = K_p \left( \frac{1 + a Td p}{1 + Td p} \right)$  avec  $a > 1$

Note : Si  $a$  est très grand on retrouve un correcteur proportionnel dérivé.

#### Diagramme de Bode de correcteur

$$C(j\omega) = K_p \left( \frac{1 + a Td j\omega}{1 + Td j\omega} \right) = K_p \left( \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_a}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_d}} \right) \text{ Avec } \omega_a = \frac{1}{a Td} < \omega_d = \frac{1}{Td}$$

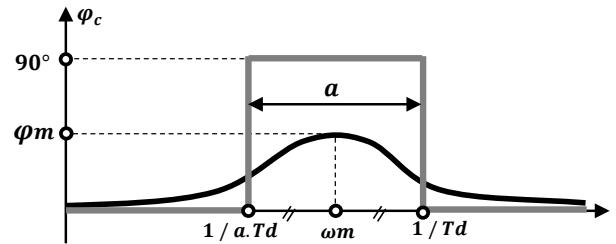
Le module	La phase
$C(j\omega) = K_p \sqrt{\frac{1 + (a Td \omega)^2}{1 + (Td \omega)^2}}$	$\varphi_c(j\omega) = \arctg(a Td \omega) - \arctg(Td \omega)$ $\Rightarrow \varphi_c(j\omega) = \arctg\left(\frac{Td(a-1)\omega}{1+a(Td\omega)^2}\right)$



#### Expression de la pulsation $\omega_m$

La pulsation  $\omega_m$  correspond au milieu géométrique entre les deux pulsations caractéristiques  $\omega_a = \frac{1}{a Td}$  et  $\omega_d = \frac{1}{Td}$  en échelle logarithmique :

$$\log(\omega_m) = \frac{1}{2} \left( \log\left(\frac{1}{a Td}\right) + \log\left(\frac{1}{Td}\right) \right) \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{\sqrt{a} Td}$$



### ➤ La phase maximale du correcteur $\varphi_m$

On remplace  $\omega_m$  dans la phase du correcteur  $\varphi_c(j\omega_m)$ :

$$\varphi_m = \varphi_c(j\omega_m) = \arctg\left(\frac{Td(a-1)\omega_m}{1+a(Td\cdot\omega_m)^2}\right) \rightarrow$$

$$\text{D'où : } \varphi_m = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$$

### ➤ Le gain maximal $G_m$ à la pulsation $\omega_m$ :

Le gain maximal  $G_m$  ajouté à la pulsation  $\omega_m$ , s'exprime :

$$\text{On a : } G_{m dB} = 20 \cdot \log(|C(j\omega_m)|)$$

$$\Leftrightarrow G_{m dB} = \frac{C_{dB}(0) + C_{dB}(+\infty)}{2} = \frac{20 \log(K_p) + 20 \log(a \cdot K_p)}{2}$$

$$\rightarrow G_{m dB} = 20 \log(K \cdot \sqrt{a}) = 20 \log(|C(j\omega_m)|)$$

D'où le module du correcteur à  $\omega_m$ :  $|C(j\omega_m)| = K \cdot \sqrt{a}$

Relations caractéristiques d'un correcteur à avance de phase : ses relations les plus intéressantes !!!

La pulsation $\omega_m$	La phase maximale à $\omega_m$	Le module de correcteur à $\omega_m$
$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a} Td}$	$\varphi_m = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$	$ C(j\omega_m)  = K_p \cdot \sqrt{a}$

**Remarque importante :**

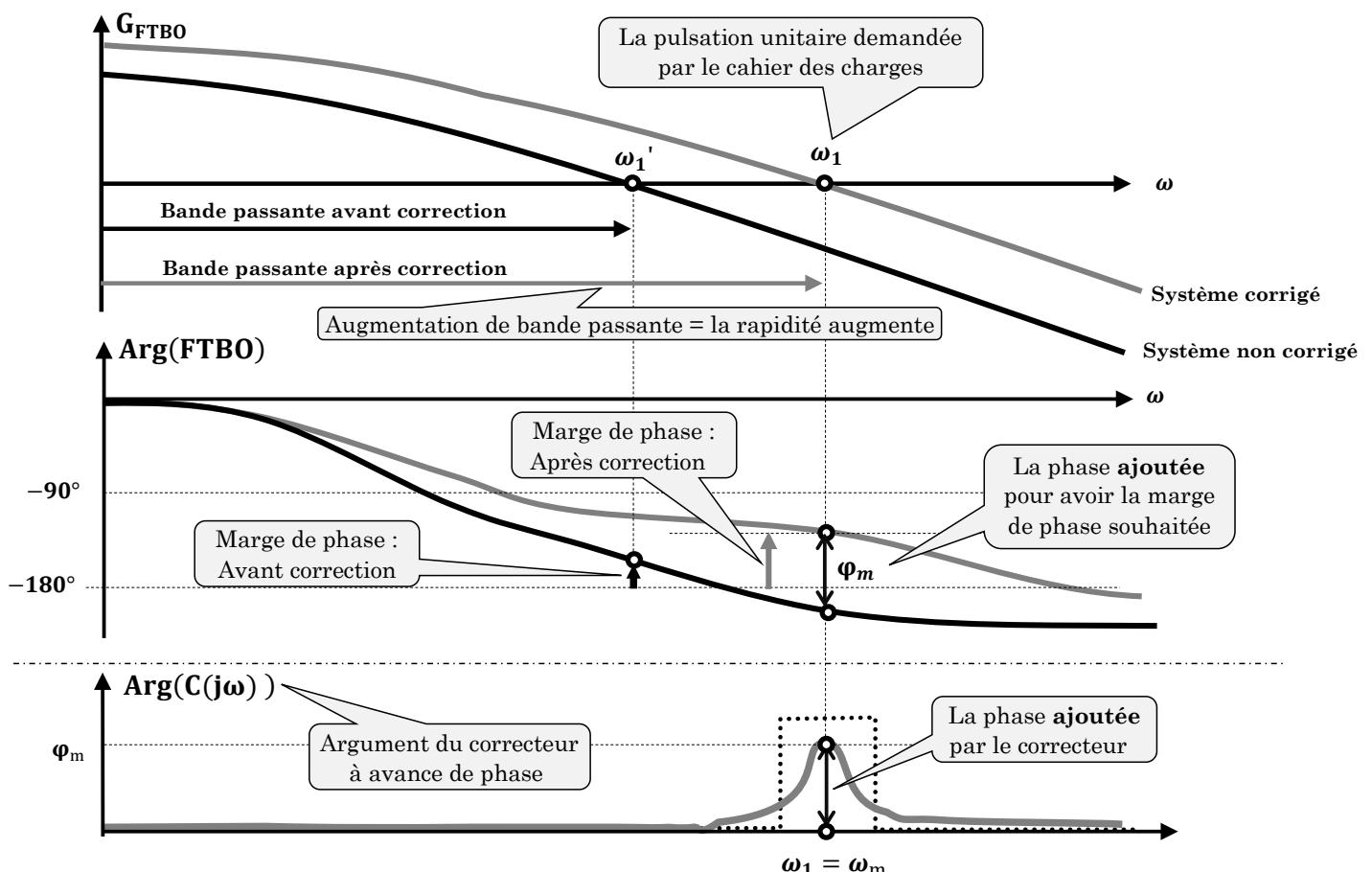
Le correcteur à avance de phase introduit un gain de phase local  $\varphi_m$  autour de la pulsation  $\omega_m$ . En plaçant  $\omega_m$  au niveau de la pulsation à gain unitaire  $\omega_1$ , on augmente la marge de phase, ce qui contribue à améliorer la **stabilité du système**.

### 3.2 Dimensionnement d'un correcteur à avance de phase

Deux critères sont généralement exigés pour le cahier des charges :

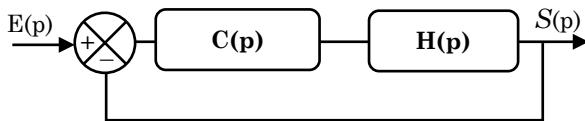
- ⦿ **Rapidité** : liée à l'augmentation de la **bande passante**, elle est caractérisée par la **pulsation  $\omega_1$** , définie comme la pulsation à gain unitaire (module = 1).
- ⦿ **Stabilité** : assurée par une **marge de phase** suffisante MP, évaluée à la pulsation  $\omega_1$ .

La figure montre qu'un correcteur à avance de phase améliore la stabilité en augmentant la marge de phase à la pulsation unitaire, tout en améliorant la rapidité grâce à l'élargissement de la bande passante de  $\omega_1'$  à  $\omega_1$ .



### La procédure de calculer les paramètres de correcteur $K_p$ , $T_d$ et $a$ :

On prend un schéma bloc à retour unitaire suivante :



#### Cahier des charges donne :

- la marge de phase demandée :  $MP$
- la pulsation unitaire :  $\omega_1$

➤ La fonction de transfert complexe en boucle ouverte :  $FTBO(j\omega) = C(j\omega) \cdot H(j\omega)$

- Le module de FTBO :  $|FTBO(j\omega)| = |C(j\omega)| \cdot |H(j\omega)|$
- Argument de la FTBO :  $\varphi_{FTBO(j\omega)} = \varphi_{C(j\omega)} + \varphi_{H(j\omega)}$

Les étapes suivantes vous guident dans le calcul d'un correcteur à avance de phase :

#### ➤ Etape 1 – Choix de la pulsation de réglage :

On règle le correcteur à la pulsation de gain unitaire  $\omega_1$ , en posant :  $\omega_m = \omega_1$ . Cela permet de centrer l'avance de phase autour de la pulsation critique.

#### ➤ Étape 2 – Calcul la phase à apporter à la pulsation unitaire $\omega_m = \omega_1$ :

On détermine la phase  $\varphi_m$  que doit fournir le correcteur pour satisfaire l'exigence de marge de phase MP à la pulsation unitaire  $\omega_m = \omega_1$  :

$$\Rightarrow \text{On a : } MP = 180 + \varphi_{FTBO(j\omega_m)} \Rightarrow MP = 180 + \varphi_{C(j\omega_m)} + \varphi_{H(j\omega_m)}$$

Sachant que le correcteur à avance de phase ajoute une phase maximale  $\varphi_m$  à la pulsation  $\omega_m$ , donc :  $\varphi_m = \varphi_{C(j\omega_m)}$

$$\text{D'où : } MP = 180 + \varphi_m + \varphi_{H(j\omega_m)} \Rightarrow \boxed{\varphi_m = MP - 180 - \varphi_{H(j\omega_m)}}$$

#### ➤ Étape 3 – Détermination du paramètre $a$ :

Une fois  $\varphi_m$  connue, le paramètre  $a$  du correcteur est calculé via la relation :  $\varphi_m = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$

$$\text{D'où : } \boxed{a = \frac{1 + \sin(\varphi_m)}{1 - \sin(\varphi_m)}}$$

#### ➤ Étape 4 – Détermination de la constante $T_d$ :

$$\text{Connaissant } a \text{ et } \omega_m, \text{ on déduit } T_d \text{ par : } \omega_m = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot T_d} \Rightarrow \boxed{T_d = \frac{1}{\omega_m \cdot \sqrt{a}}}$$

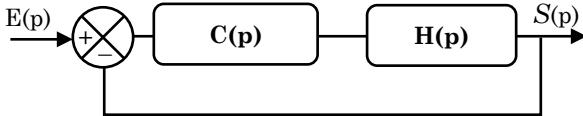
#### ➤ Étape 5 – Calcul du gain $K_p$ :

Enfin, on ajuste  $K_p$  pour garantir un **gain unitaire** de la FTBO à  $\omega_1$  :  $|C(j\omega_m)| \cdot |H(j\omega_m)| = 1$

$$\text{Or : } |C(j\omega_m)| = K_p \cdot \sqrt{a} \Rightarrow \boxed{K_p = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot |H(j\omega_m)|}} \text{ avec : } \omega_m = \omega_1$$

### Exemple :

On considère le schéma d'asservissement suivant :



#### Cahier des charges :

- la marge de phase demandée :  $MP = 45^\circ$
- la pulsation unitaire :  $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$

- La fonction de transfert du système est définie par :  $H(p) = \frac{5}{p(1 + 0,5 \cdot p)}$

- La fonction de transfert du correcteur :  $C(p) = K \left( \frac{1 + a \cdot T_p}{1 + T_p} \right)$

- **Question :** Déterminer les paramètres du correcteur à avance de phase  $a$ ,  $T$  et  $K$  de manière à satisfaire les exigences du cahier des charges.

Avant de commencer les calculs, il est préférable de trouver le module et la phase du système  $H(j\omega)$  (juste une question d'organisation de méthode de calculs) :

$H(j\omega) = \frac{5}{j\omega(1+0.5j\omega)}$	Le module	$ H(j\omega)  = \frac{5}{\omega\sqrt{1+(0.5\omega)^2}}$
	La phase	$\varphi_{H(j\omega)} = -90^\circ - \arctg(0.5\omega)$

☞ D'où, la **fonction de transfert complexe en boucle ouverte** s'exprime alors :  $FTBO(j\omega) = C(j\omega) \cdot H(j\omega)$

- Le module de FTBO :  $|FTBO(j\omega)| = |C(j\omega)| \cdot \frac{5}{\omega\sqrt{1+(0.5\omega)^2}}$
- Argument de la FTBO :  $\varphi_{FTBO(j\omega)} = \arg(C(j\omega) \cdot H(j\omega)) = \varphi_{C(j\omega)} + \varphi_{H(j\omega)}$   
d'où :  $\varphi_{FTBO(j\omega)} = \varphi_{C(j\omega)} - 90^\circ - \arctg(0.5\omega)$

☞ **Etape 1 – Choix de la pulsation de réglage :**

On règle le correcteur à la pulsation de gain unitaire  $\omega_1$ , en posant :  $\omega_m = \omega_1 \Rightarrow \omega_m = 10 \text{ rad/s}$

☞ **Etape 2 – Calcul la phase à apporter à la pulsation unitaire  $\omega_m = \omega_1$  :**

⇒ On a :  $MP = 180 + \varphi_{FTBO(j\omega_m)} \Rightarrow MP = 180 + \varphi_{C(j\omega_m)} - 90 - \arctg(0.5\omega_m) = 45^\circ$

Sachant que le correcteur à avance de phase ajoute une phase maximale  $\varphi_m$  à la pulsation  $\omega_m$ , donc :  $\varphi_m = \varphi_{C(j\omega_m)}$

Ce qui donne :  $MP = 180 + \varphi_m - 90 - \arctg(0.5\omega_m) = 45^\circ$

D'où la phase ajoutée par le correcteur est  $\varphi_m = 45^\circ - 180 + 90 + \arctg(0.5\omega_m) \Rightarrow \varphi_m = 33.69^\circ$

☞ **Etape 3 – Détermination du paramètre a :**

Une fois  $\varphi_m$  connue, le paramètre  $a$  du correcteur est calculé via la relation :  $a = \frac{1 + \sin(\varphi_m)}{1 - \sin(\varphi_m)} \Rightarrow a = 3.49$

☞ **Etape 4 – Détermination de la constante Td :**

Connaissant a et  $\omega_m$ , on déduit T par :  $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot T} \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} \Rightarrow T = 0.053$

☞ **Etape 5 – Calcul du gain Kp :**

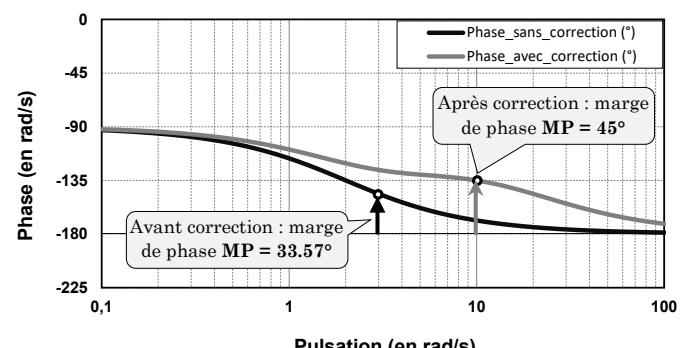
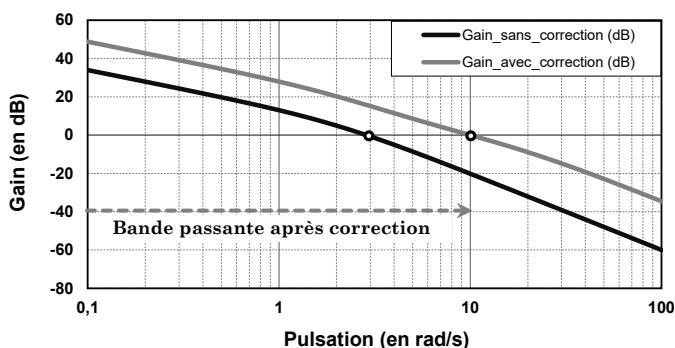
Enfin, on ajuste Kp pour garantir un **gain unitaire** de la FTBO à  $\omega_1$  :  $|C(j\omega_m)| \cdot |H(j\omega_m)| = 1$

Or :  $|C(j\omega_m)| = K_p \cdot \sqrt{a} \Rightarrow K_p = \frac{\omega_m \sqrt{1 + (0.5\omega)^2}}{5\sqrt{a}}$

☞ **Correcteur à avance obtenu :**

$$C(p) = 5.46 \cdot \frac{1 + 0.185p}{1 + 0.053p} \quad \text{avec } a = 3.49, T = 0.053 \text{ et } K_p = 5.46$$

### Résultats de simulation : Diagramme de Bode

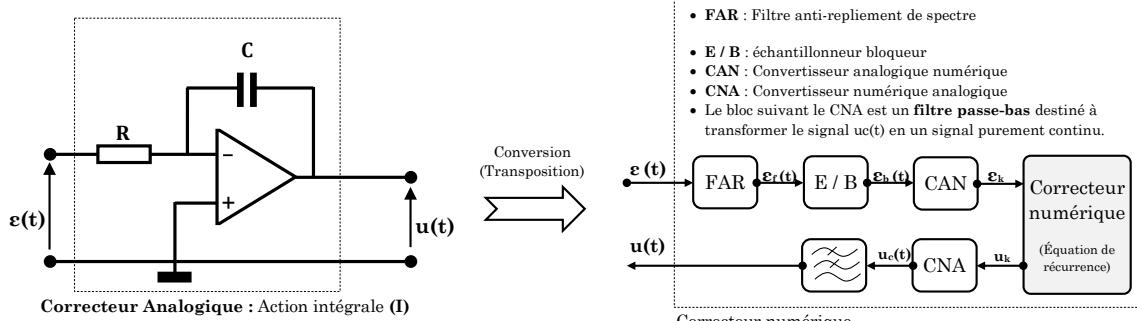


### Remarques :

La simulation montre qu'après l'ajout du correcteur à avance de phase, la bande passante s'élargit de **2 rad/s** à **10 rad/s**, ce qui traduit une augmentation de la rapidité du système. Par ailleurs, la marge de phase passe de **33.57°** à **45°**, indiquant une amélioration de la stabilité. En revanche, ce correcteur n'influence pas la précision statique : l'écart statique reste nul grâce à la présence de l'intégrateur dans la FTBO, et non à cause du correcteur lui-même.

## V. Transposition des correcteurs analogiques

La numérisation des correcteurs analogiques s'impose aujourd'hui comme une nécessité, car l'électronique numérique remplace progressivement les systèmes analogiques classiques. Cette transposition permet d'implémenter les lois de correction sur des microcontrôleurs ou des processeurs numériques de signal (DSP), tout en atténuant les effets du bruit, les dérives des composants et en simplifiant les réglages.

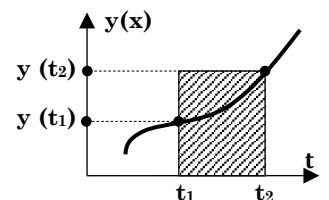


En numérique, les correcteurs sont exprimés sous forme d'équations de récurrence, exécutées à intervalles réguliers grâce à une horloge temps réel. Les signaux  $u_k$  et  $\varepsilon_k$ , issus de l'échantillonnage des grandeurs continues, permettent de réaliser les actions proportionnelle, intégrale et dérivée de manière discrète.

### 1. Transposition : Méthode d'Euler explicite.

Il existe plusieurs méthodes, parmi ses méthodes, La méthode d'Euler explicite permet de transposer un système continu en discret en approximant les dérivées par des différences finies. Simple et efficace, elle repose sur un échantillonnage régulier respectant la condition de Shannon pour garantir la fidélité du signal :  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow y_k \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$

Où  $T_e$  est la période d'échantillonnage, respectant la condition de Shannon.



### 2. Equation de récurrence : cas d'un correcteur PI

#### ⌚ Étape 1 : Expression dans le domaine continu (continu)

Le correcteur PI s'écrit en continu sous la forme :

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \Rightarrow u(t) = K_p \cdot e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau$$



C'est une équation **fonctionnelle** qui combine une action proportionnelle et une intégration continue.

#### ⌚ Étape 2 : Passage à l'équation différentielle

On différencie l'expression pour obtenir une équation différentielle entre  $u(t)$  et  $e(t)$  :  $\frac{du(t)}{dt} = K_p \cdot \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i} \cdot e(t)$

#### ⌚ Étape 3 : Discréétisation par la méthode des rectangles (Euler explicite)

On applique la méthode d'Euler explicite :  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow y_k \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$

$$\text{On a : } \frac{du(t)}{dt} = K_p \cdot \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i} \cdot e(t) \Rightarrow \frac{u_k - u_{k-1}}{T_e} = K_p \cdot \frac{e_k - e_{k-1}}{T_e} + \frac{K_p}{T_i} \cdot e_k \Rightarrow u_k = u_{k-1} + a_0 \cdot e_k + a_1 \cdot e_{k-1}$$

$$\text{On obtient l'équation de récurrence suivante : } u_k = u_{k-1} + \underbrace{\left(K_p + \frac{K_p T_e}{T_i}\right)}_{a_0} \cdot e_k - \underbrace{\frac{K_p}{T_i} \cdot e_{k-1}}_{a_1}$$

### 3. Réalisation d'un correcteur PI : Algorithme de fonctionnement

**Algorithme : (Nom : Correcteur PI)**

**Variables :**

a0, a1, un, unl, en, en1 : réelles  
a0 = 0.25, a1 = 0.5 ;

E en entrée ;  
U en sortie ;

● **Début :**

Lire l'entrée : en <= E ; // Conversion d'erreur par un CAN  
Calculer :  
un <= unl + (a0 \* en) - (a1 \* en1);

**Ecrire à la sortie : U <= unl ; // fait sortir la commande par un CNA**

**Sauvegarder :**  
en1 = en ;  
unl = un ;

**Attendre la fin de Te ;**

● **Aller au début.**

**Références bibliographiques :**

- **N. BENNIS**, Automatique linéaire continue – MAROC : TOUBKAL et IGA, 2006
- **Pierre Tréhin**, Sciences industrielles de l'ingénieur (SII) - spécial ATS, Ellipses 2019
- **C. François**, Les grandes fonctions de la chaîne d'énergie - IUT, BTS, CPGE, FRANCE : Ellipses, 2016
- **Raymond KONN**, Commande analogique et numérique des systèmes – Éditions Ellipses, Paris, 2010.