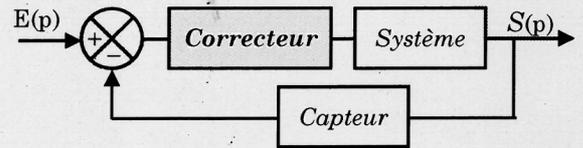


correction des systèmes asservis

I. Introduction

Les systèmes asservis peuvent présenter des problèmes de précision, stabilité, rapidité et dépassement envers les spécifications. Un correcteur fréquemment utilisé, le PID (Proportionnel, Intégral, Dérivateur), améliore les performances d'une boucle d'asservissement et/ou régulation, largement adopté pour sa simplicité et efficacité dans l'industrie.

L'emplacement usuel d'un correcteur dans une boucle est dans la chaîne d'action, juste après le comparateur comme le montre la figure ci-après.



Un correcteur vise à répondre aux exigences définies dans un cahier des charges, qui expriment des critères de stabilité, de précision et de rapidité sous diverses formulations.

Ce chapitre a pour but de comprendre le fonctionnement d'un correcteur PID, de choisir la meilleure façon de régler un processus, et de trouver les bons réglages en utilisant des méthodes pratiques ou des idées théoriques.

II. Position de problème de la correction

En se basant sur les chapitres précédents, nous avons tirées des conclusions sur la stabilité, la précision et la rapidité. Pour bien régler notre système, nous résumons ci-dessous les points remarquables et les montrons sur le plan de Bode.

1- La stabilité

La stabilité concerne l'état d'un système en BO près de la pulsation unitaire $\omega 1$ et de la pulsation critique ωc .

Un système est complètement stable lorsque ses marges de gain et de phase sont significativement grandes.

2- La rapidité

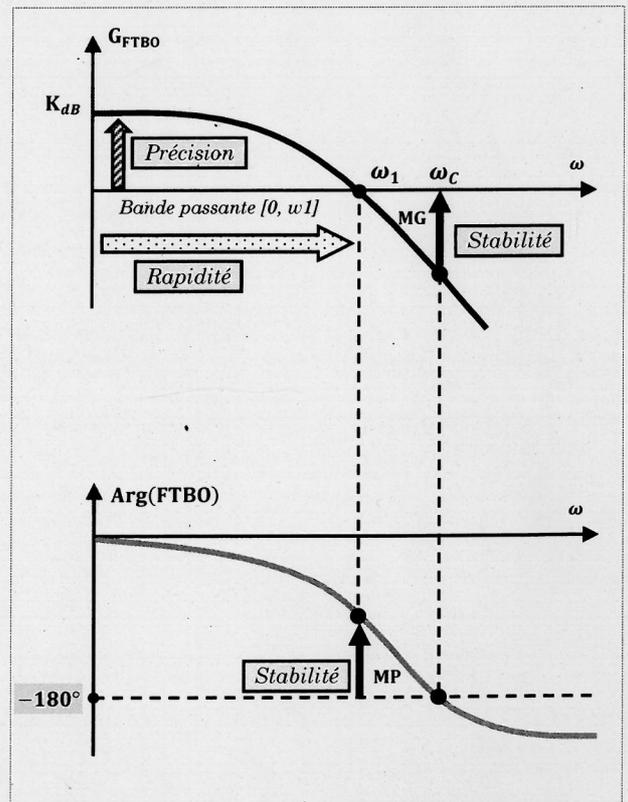
La rapidité du système est liée à son comportement de la FTBO dans la bande passante du système, ce qui se reflète bien par la pulsation unitaire $\omega 1$.

Un système est rapide lorsque la bande passante est la plus grande possible.

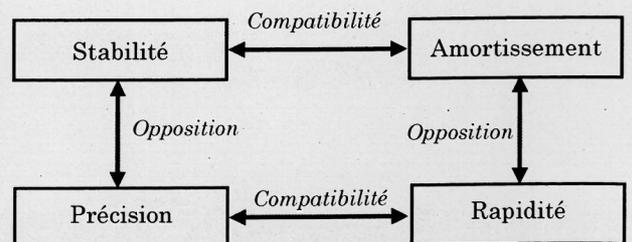
3- Précision

La précision est conditionnée par la forme de la FTBO aux « basses fréquences », ce la traduire à la valeur du gain KdB.

Un système est précis lorsque le gain en basse fréquence est significativement élevée et ou plusieurs intégration en BO



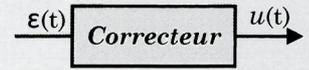
*Les trois qualités ne se combinent malheureusement pas dans une seule direction d'amélioration. Ainsi, il est impossible de satisfaire toutes les exigences d'un cahier des charges. Les experts en automatisation font face à un dilemme illustré dans la figure ci-dessous : obtenir une **stabilité solide** (essentielle) tout en assurant une **bonne précision**.*



III. Correcteur Proportionnel Intégral Dérivé : PID

1. Structure générale d'un correcteur PID

Un correcteur constitue l'élément intelligent au sein d'une boucle de régulation, chargé de traiter le signal d'écart entre la consigne et la mesure de sortie. Il génère ensuite un signal de commande destiné à contrôler les pré-actionneurs selon les actions qui suivent :



- Action proportionnelle (P) : $u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t)$ → $U(p) = K_p \cdot \varepsilon(p)$
- Action intégrale (I) : $u(t) = \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^T \varepsilon(t) dt$ → $U(p) = \frac{1}{T_i p} \varepsilon(p)$
- Action dérivée (D) : $u(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ → $U(p) = T_d p \cdot \varepsilon(p)$

Dans la réalité, ces actions fondamentales sont combinées pour créer des correcteurs de types PI, PD et PID. Pour simplifier, on peut dire que :

- L'action P améliore la précision et la rapidité (mais peut rendre le système moins stable) ;
- L'action I permet de supprimer l'écart statique ;
- L'action D contribue à stabiliser le système. Elle a également un impact sur la vitesse (ralentissement).

Trois différentes structures de correcteurs PID sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Structure série	Structure parallèle	Structure mixte
$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p)$	$C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p} + T_d p$	$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$

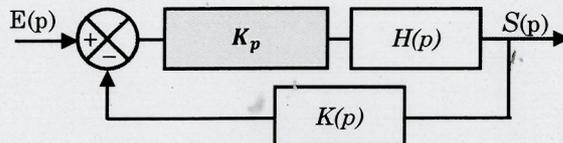
Dans ce cours, nous nous concentrerons uniquement sur le correcteur PID à structure mixte. Les autres structures ne seront pas abordées afin de simplifier l'étude.

2. Étude et analyse des performances de correcteur PID

Dans cette étude, notre attention se portera exclusivement sur les correcteurs P, PI et PD, car ce sont les types les plus fréquemment employés dans la grande majorité des installations industrielles.

2.1. Correcteur par action proportionnelle

Dans ce type de correcteur, le signal de commande $u(t)$ est proportionnel au signal d'écart $\varepsilon(t)$: $u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t) \Rightarrow C(p) = K_p$



La qualité de régulation n'est pas atteinte par le correcteur proportionnel. Le choix de la valeur du gain K_p est basé sur un ensemble de spécifications fournies par un cahier des charges. On peut résumer les conséquences de l'augmentation de K_p comme suit :

- Minimiser l'erreur statique conduit à une **amélioration de la précision**.
- Réduire le temps de réponse du système entraîne une **amélioration de sa rapidité**.
- La réduction des marges de gain et de phase se traduit par une **diminution de la stabilité** du système !!!

our mieux saisir ces effets, prenons l'exemple d'un système dont la fonction en boucle ouverte est définie comme suit :

$$FTBO(p) = C(p).K(p).H(p) = \frac{K_p}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \text{ Avec } \tau_1 = 0.1 \text{ s et } \tau_2 = 0.2 \text{ s}$$

Cahier des charges :

- o Augmentation de la rapidité
- o Une marge de phase $MP=45^\circ$

Méthode de calcul du gain de correcteur K_p

La méthode consiste à utiliser la définition de la marge de phase :

$$\begin{cases} MP = 180 + \text{Arg} [FTBO(j \omega_1)] \\ \omega_1 / | FTBO(j \omega_1) | = 1 \end{cases}$$

En remplaçant MP par 45 degrés et en déduisant la valeur de ω_1 à laquelle le gain devient nul.

- A partir de diagramme de Bode : $\omega_1 = 2.8 \text{ rad/s}$

Pour trouver K_p , on utilise la deuxième condition :

$$\begin{aligned} | FTBO(j \omega_1) | = 1 &\rightarrow 20 \log(FTBO(j \omega_1)) = 0 \\ \Leftrightarrow 20 \log(C(j \omega_1).K(j \omega_1).H(j \omega_1)) &= 0 \\ \Leftrightarrow 20 \log(K_p . K(j \omega_1).H(j \omega_1)) &= 0 \\ \Leftrightarrow 20 \log(K_p) + 20 \log(K(j \omega_1).H(j \omega_1)) &= 0 \end{aligned}$$

Le terme $20 \log(K(j \omega_1).H(j \omega_1))$ représente le gain du système non corrigé ($K_p=1$) à la pulsation ω_1 , on le note par $Gnc(\omega_1)$.

D'où : $20 \log(K_p) = -Gnc(\omega_1)$, soit : $K_p = 10^{\frac{-Gnc(\omega_1)}{20}}$

- A partir du diagramme de Bode : $Gnc(\omega_1) = -11 \text{ dB}$

Afin de répondre aux exigences du cahier des charges, déterminons la valeur de K_p nécessaire : $K_p = 3.55$

Les résultats de cette correction effectuée

L'objectif est d'améliorer la rapidité, ce qui l'améliore légèrement, mais crée un problème de dépassement important pouvant affecter sa stabilité. Étant donné que le système possède une intégration en BO, il offre une précision parfaite.

Remarque : Un correcteur à action proportionnelle modifie le gain du système, mais n'a aucun effet sur la phase (K_p n'est pas inclus dans l'expression de la phase après correction).

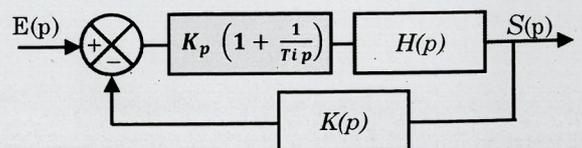
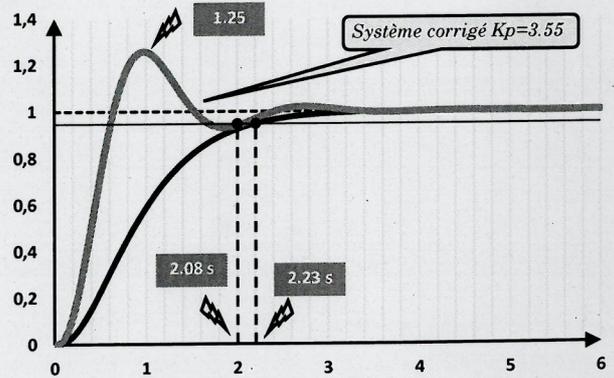
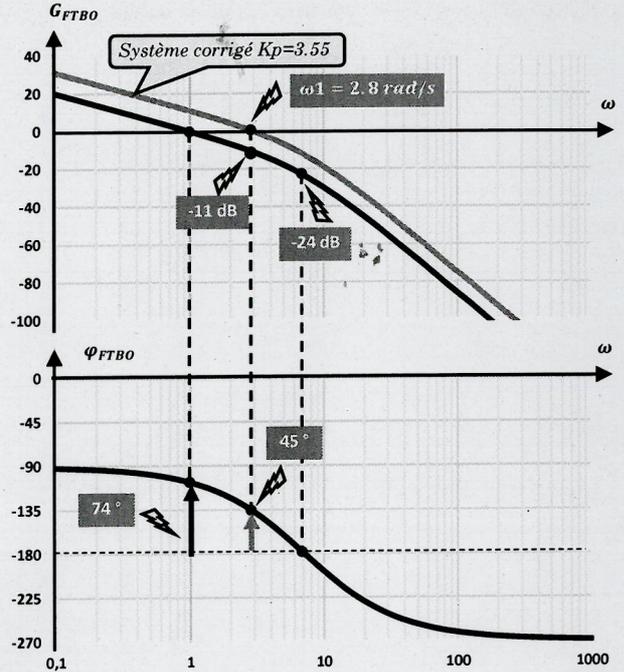
2.2. Correcteur par action proportionnelle *intégrale*

Dans ce type de correcteur, le signal de commande $u(t)$ est lié au signal d'écart $\varepsilon(t)$ par : $u(t) = K_p \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int \varepsilon(t) dt \right)$ donc :

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

Nous retiendrons deux méthodes de réglage d'un tel correcteur :

- o Critère de marge de phase,
- o Compensation du pôle dominant.



La fonction complexe $C(j\omega)$ est le suivant :

$$C(j\omega) = K_p \left(1 + \frac{1}{Ti j\omega} \right) \Rightarrow C(j\omega) = \frac{1 + Ti j\omega}{\frac{Ti}{K_p} j\omega}$$

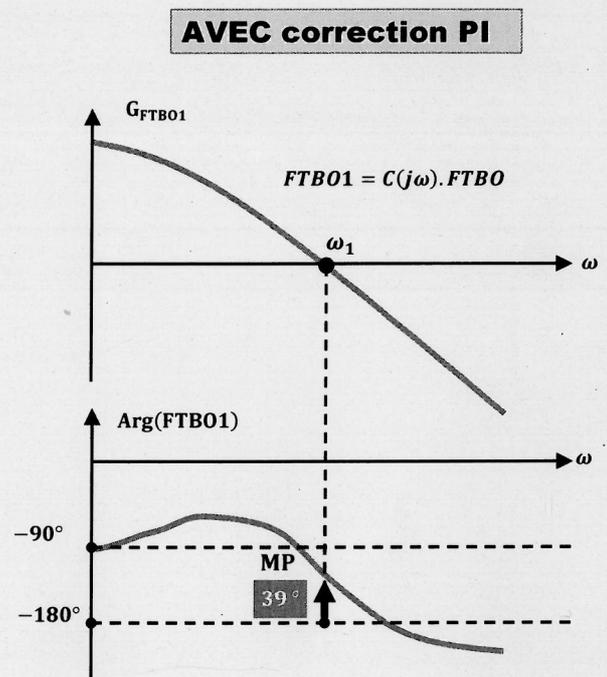
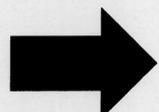
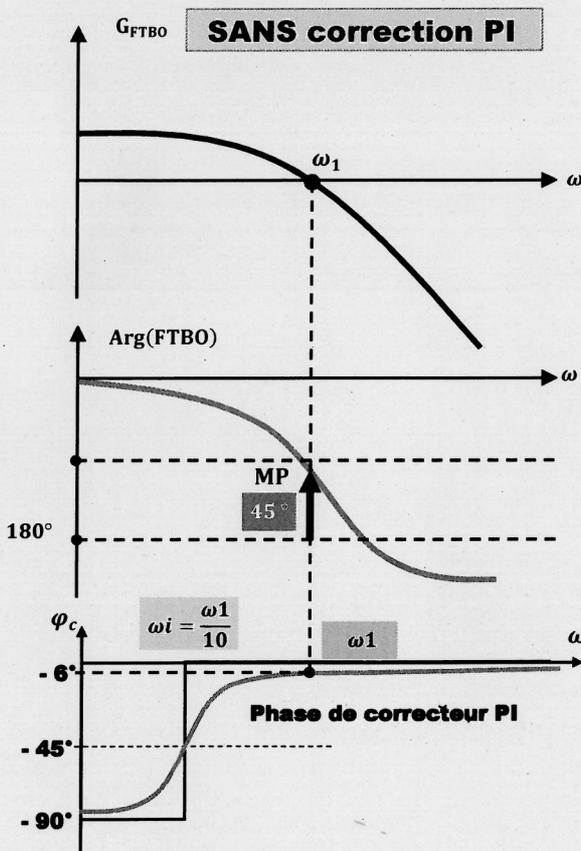
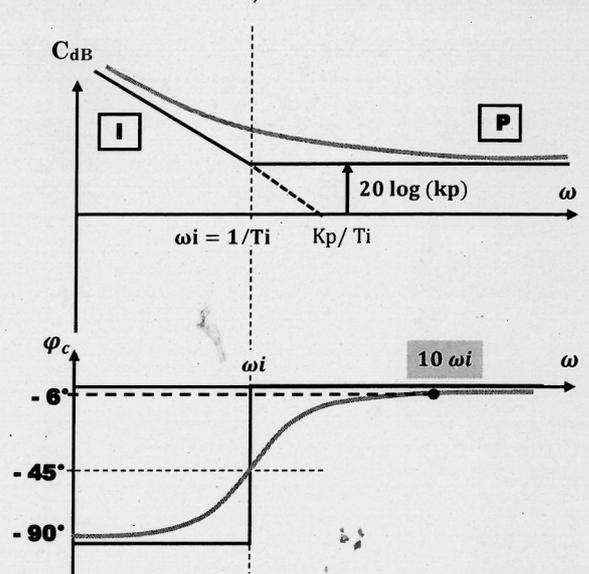
Ce correcteur présente les points remarquables suivants :

- La phase est égale à -45° pour $\omega = \omega_i$;
- La phase est égale à -6° pour $\omega = 10 \omega_i$;
- La phase est égale à -84° pour $\omega = \omega_i / 10$;

Remarque :

Les résultats montrent que ce correcteur diminue la stabilité du système. En conséquence, il retire 90 degrés de phase à toutes les fréquences, ce qui provoque immédiatement une déstabilisation.

Pour remédier au problème on place le correcteur PI en avant de la pulsation de coupure à 0 dB (ω_U) de la FTBO pour ne pas trop réduire MP, comme le montre dans le plan de Bode du système.



❖ **Méthode par critère de marge de phase**

L'objectif ici est de configurer le correcteur de manière à garantir une marge de stabilité adéquate. La procédure comprendra donc les étapes suivantes :

- Tout d'abord, ajustez l'action proportionnelle K_p (avec $1/Ti = 0$) pour garantir une marge de phase désirée augmentée de 6 degrés afin de compenser l'effet de l'action intégrale.
- Ensuite, configurez l'action intégrale Ti selon le réglage suivant :

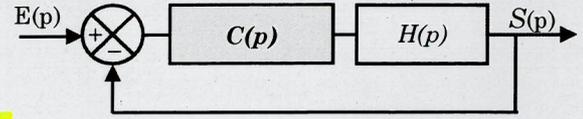
Si la marge de phase : $MP \geq 45^\circ$	Si la marge de phase : $MP < 45^\circ$
$\omega_i = \frac{1}{Ti} = \frac{\omega_1}{10}$	$\omega_i = \frac{1}{Ti} = \frac{\omega_1}{4}$

Exemple :

Un système est décrit par sa fonction de transfert en boucle ouverte : $H(p) = \frac{4}{1 + 0,24p + 10^{-2} p^2}$

Cahier de charge :

- Annulation de l'erreur statique
- On souhaite dimensionner un correcteur pour ce système tel que la marge de phase du système corrigé soit égale à 45° .



1. Etude de la boucle ouverte sans correction

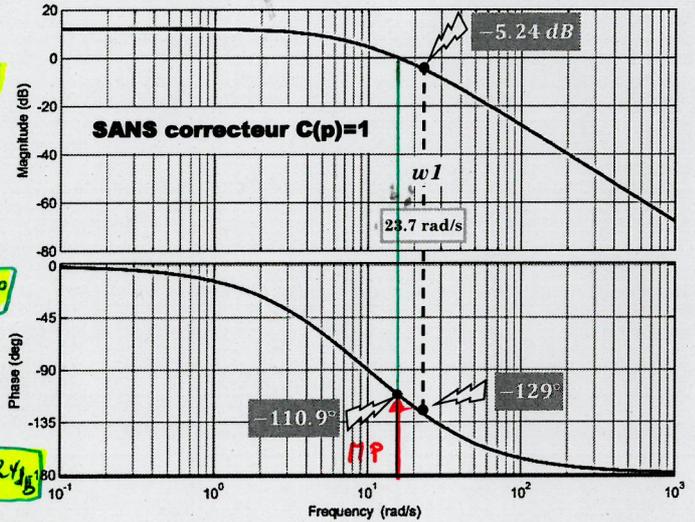
Q1 : Calculez la marge de phase du système en boucle ouverte non corrigé : $MP = 180 - 110,9 \Rightarrow MP = 69,1^\circ$

Q2 : Pour obtenir une marge de phase cible de 45° , déterminez la marge de phase MP' à prendre en compte après la compensation de l'effet de l'action intégrale (-6°).

$MP' = MP + 6^\circ \Rightarrow MP' = 45 + 6 \Rightarrow MP' = 51^\circ$

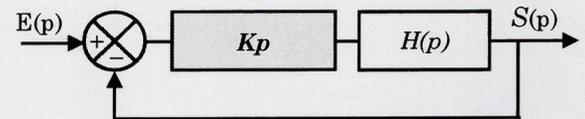
Q3 : À partir de là, déterminez le gain supplémentaire à appliquer, $G1$, ainsi que la pulsation correspondante, $w1$.

le gain à ajouter : $G1 = 0 - 5,24 \Rightarrow G1 = 5,24$
 donc $w1 = 23,7 \text{ rad/s} \Rightarrow Ti = \frac{10}{w1} \Rightarrow Ti = 0,422 \text{ s}$



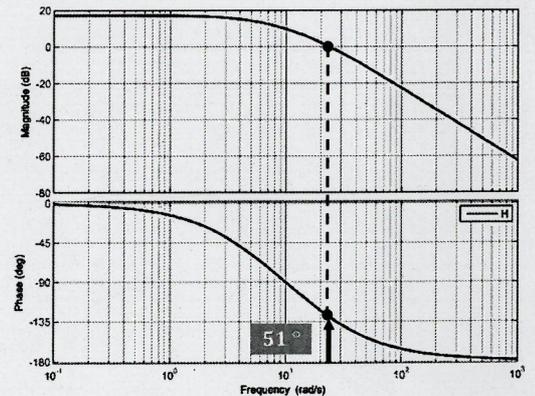
2. Calcul du gain intégral Kp

Pour calculer Kp , on annule l'effet de l'action intégrale. Ensuite, en se basant sur une marge de phase ajoutée de 6° à la pulsation $w1$.
 Donc : $w1 = 23,7 \text{ rad/s} - MP' = 51^\circ - G = 5,24 \text{ dB}$.



Le calcul de gain Kp par la relation suivante : $20 \log(Kp) = G$, soit Kp :

$\Rightarrow Kp = 10^{G/20} \Rightarrow Kp = 1,82$



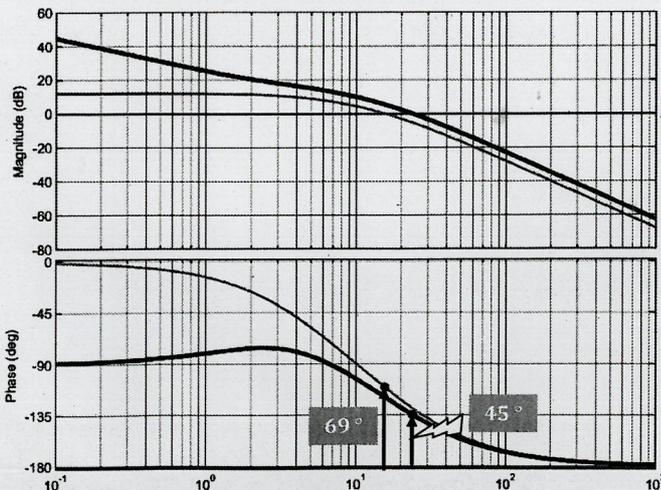
Résultat :

- Marge de gain : 50° à $w1 = 23,7 \text{ rad/s}$

3. Calcul la constante intégrale Ti

Puisque $MP' > 50^\circ \rightarrow Ti = \frac{10}{w1} = 0,422 \text{ s}$

On trouve les résultats suivants :



❖ **Méthode par compensation du pôle dominant**

Le temps de réponse d'un système dépend de ses pôles. Un pôle avec une faible partie réelle, ralentit le système. La méthode de compensation du pôle dominant consiste à éliminer le pôle de valeur réelle la plus faible.

Lorsque la fonction de transfert est exprimée sous forme de constantes de temps, la constante dominante est celle qui présente la plus grande valeur parmi toutes les constantes de la fonction.

Un correcteur PI est dimensionné de manière à ce que la constante de temps de l'intégrateur compense la constante dominante de la fonction de transfert. La méthode de réglage par compensation du pôle dominant consiste donc à :

- Régler la pulsation de coupure de l'intégrateur afin qu'elle soit égale à la pulsation de coupure la plus faible de la fonction de transfert.
- Ensuite, régler le coefficient K_p de manière à assurer la marge de phase souhaitée.

Exemple :

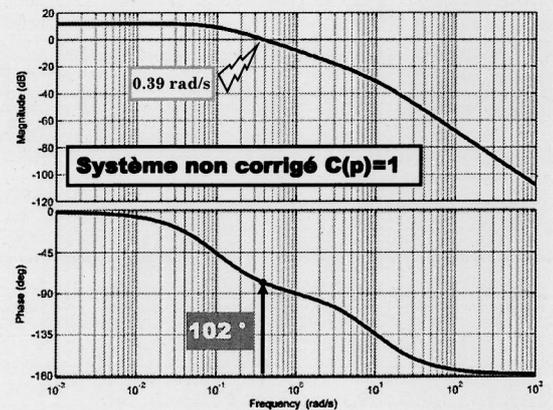
Un système est décrit par sa fonction de transfert en boucle ouverte :

$$FTBO(p) = C(p) \cdot \frac{4}{(1 + 0.1p)(1 + 10p)}$$

- Marge de phase : $MP = 102^\circ$ (stable)
- La pulsation à gain nul : $\omega_l = 0.39 \text{ rad/s}$

Cahier des charges :

- La marge de phase souhaité : $MP = 45^\circ$
- Amélioration de la rapidité



❖ **Choix de T_i**

Comme mentionné précédemment, la constante d'intégration T_i est alignée avec la plus grande constante, donc $T_i = 10s$.

La fonction de transfert est ensuite réexprimée comme suit : $FTBO1(p) = \frac{4 K_p}{10 p (1 + 0.1 p)}$

La fonction de transfert complexe s'écrit :

$FTBO1(j\omega) = \frac{4 K_p}{10 j\omega (1 + 0.1 j\omega)}$	Module	$ FTBO1(j\omega) = \frac{4 K_p}{10 \omega \sqrt{1 + (0.1 \omega)^2}}$
	La phase	$\varphi (FTBO1(j\omega)) = -90 - \text{arctg}(0.1 \omega)$

❖ **Calcul de K_p**

- Tout d'abord, nous calculons ω_1 , la fréquence à laquelle la marge de phase est de 45 degrés:

$$MP = 180 + \text{Arg.}(FTBO1(j\omega_1)) = 45^\circ$$

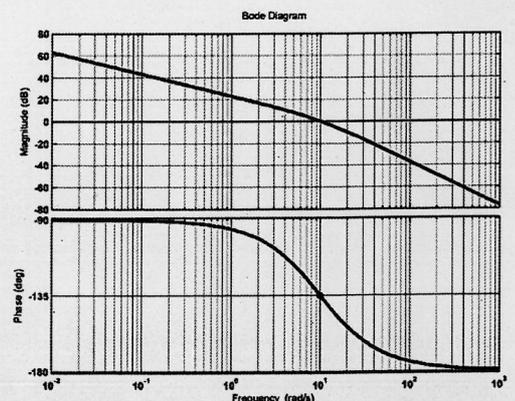
$$\Rightarrow 180 - 90 - \text{arctg}(0.1 \omega_1) = 45 \rightarrow \text{Donc cela donne : } \omega_1 = 10 \text{ rad/s}$$

- Ensuite, nous calculons le gain K_p de manière à ce que $|FTBO1(j\omega_1)|$ soit égal à 1, où ω_1 est la fréquence que nous avons déterminée précédemment. $\frac{4 K_p}{10 \omega_1 \sqrt{1 + (0.1 \omega_1)^2}} = 1 \rightarrow \text{Donc : } K_p = 35.35$

La fonction de transfert du correcteur PI à installer :

$$C(p) = 35.35 \left(1 + \frac{1}{10p} \right)$$

En résumé, un correcteur PI assure une précision efficace en éliminant l'erreur statique et améliore la rapidité tout en maintenant la stabilité du système. Cependant, il est essentiel de noter que l'ajout d'un correcteur PI à un système qui possède une intégration en BO conduit à son instabilité.



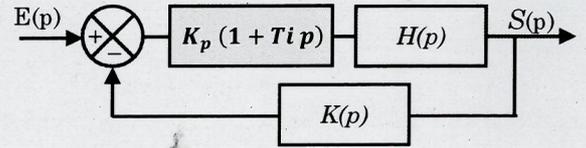
2.3. Correcteur par actions proportionnelle et dérivée (PD)

Dans ce type de correcteur, le signal de commande $u(t)$ est lié au signal d'écart $\varepsilon(t)$ par : $u(t) = K_p \left(\varepsilon(t) + T_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)$ donc :

$$C(p) = K_p (1 + T_d p)$$

En utilisant ce correcteur, pour modifier le comportement du système autour de la fréquence de coupure à 0 dB (ω_1) de la FTBO afin d'améliorer les qualités suivants :

- Rendre un système plus stable lorsque la marge de phase est faible.
- Augmenter la rapidité de système sans influencer maintenant sur la stabilité.



Note importante :
 La fonction de transfert d'un correcteur PD peut poser des problèmes de causalité car elle incorpore une dérivée non causale. En pratique, un filtre passe-bas est souvent ajouté pour rendre le système causal. Ce type de correcteur, appelé correcteur à avance de phase, avance la phase du système pour améliorer la stabilité.

❖ **Correcteur à avance de phase :**

Le correcteur à avance de phase est défini par la fonction de transfert suivant :

$$C(p) = K_p \left(\frac{1 + a \cdot T_d \cdot p}{1 + T_d \cdot p} \right) \text{ avec } a > 1$$

Note : Si a est très grand on retrouve un correcteur proportionnel dérivé.

❖ **Diagramme de Bode de correcteur à avance de phase :**

- **La fonction de transfert complexe C(jw) :**

$$C(j\omega) = K_p \left(\frac{1 + a \cdot T_d \cdot j\omega}{1 + T_d \cdot j\omega} \right) \text{ Avec } \omega_a = \frac{1}{a \cdot T_d} < \omega_d = \frac{1}{T_d}$$

Le module	La phase
$C(j\omega) = K_p \sqrt{\frac{1 + (a \cdot T_d \cdot \omega)^2}{1 + (T_d \cdot \omega)^2}}$	$\varphi_c(j\omega) = \arctg(a \cdot T_d \cdot \omega) - \arctg(T_d \cdot \omega)$ $\Leftrightarrow \varphi_c(j\omega) = \arctg\left(\frac{T_d(a-1)\omega}{1+a(T_d\omega)^2}\right)$

- **Expression de la pulsation ω_m**

La pulsation ω_m se trouve au milieu de ω_a et ω_d . Il est important de noter que nous opérons dans un contexte où nous utilisons une échelle logarithmique :

$$\log(\omega_m) = \frac{1}{2} \left(\log\left(\frac{1}{a \cdot T_d}\right) + \log\left(\frac{1}{T_d}\right) \right) \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot T_d}$$

- **Expression de la phase maximale φ_m**

On remplace ω_m dans la phase de correcteur $\varphi_c(j\omega)$:

$$\varphi_m = \varphi_c(j\omega_m) = \arctg\left(\frac{T_d(a-1)\omega_m}{1+a(T_d\omega_m)^2}\right) \Rightarrow \varphi_m = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$$

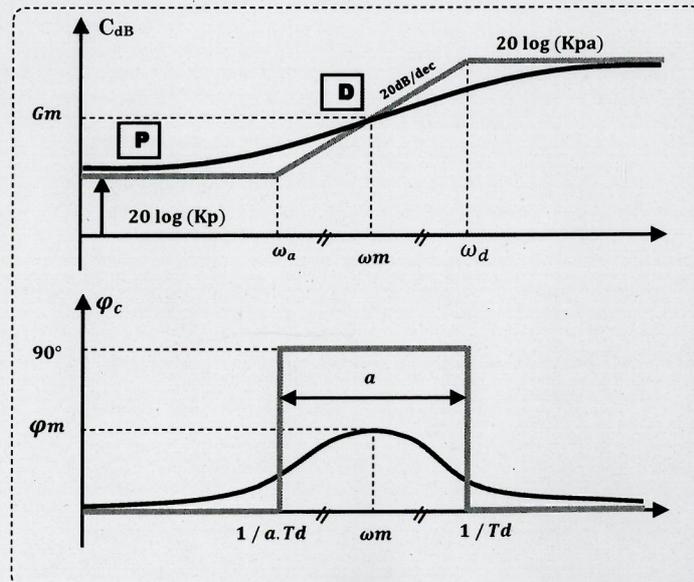
- **Le gain maximal G_m à la pulsation ω_m**

Le gain maximal G_m ajouté à la pulsation ω_m , s'exprime :

$$G_{m_{dB}} = 20 \log(|C(j\omega_m)|)$$

$$G_{m_{dB}} = \frac{C_{dB}(0) + C_{dB}(+\infty)}{2} = \frac{20 \log(K_p) + 20 \log(a \cdot K_p)}{2} \Rightarrow G_{m_{dB}} = 20 \log(K \cdot \sqrt{a})$$

On module : $|C(j\omega_m)| = K \cdot \sqrt{a}$



Note importante :
 Le correcteur à avance de phase permet d'ajouter localement une phase φ_m à la pulsation ω_m . Cette pulsation ω_m devient alors ω_1 , où le gain du système devient nul. Cette opération vise à augmenter la marge de phase et, par conséquent, à améliorer la stabilité.

Les relations d'un correcteur à avance de phase : *ses relations les plus intéressants dans le calcul du correcteur.*

La pulsation ω_m	La phase maximale à ω_m	Le module de correcteur à ω_m
$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a} \tau_d}$	$\varphi_m = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$	$ C(j\omega_m) = K_p \cdot \sqrt{a}$

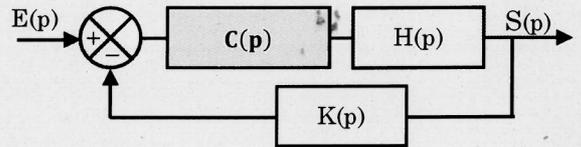
❖ **Méthode de dimensionnement de correcteur**

Le cahier des charges fréquemment exige la satisfaction de deux critères principaux :

- La rapidité, qui se traduit par une augmentation de la bande passante, est définie par la **pulsation ω_1** , laquelle correspond au point où le gain devient nul, c'est-à-dire que le module est égal à 1.
- La stabilité, qui garantit une **marge de phase adéquate MP** à la pulsation unitaire ω_1 (Gain nul).

La procédure comprendra donc les étapes suivantes afin de calculer K_p , a et T_d :

On suppose le système asservi présente par le schéma bloc suivant :



Le module et la phase s'exprime par :

$$\begin{cases} |FTBO(j\omega)| = |C(j\omega)| \cdot |K(j\omega)| \cdot |H(j\omega)| \\ \varphi(j\omega) = \varphi(C(j\omega)) + \varphi(K(j\omega)) + \varphi(H(j\omega)) \end{cases}$$

Etape 1 : On cherche donc à ajuster les dimensions du correcteur à avance de phase pour qu'il soit réglé à la pulsation de gain unitaire, ce qui équivaut à déplacer la pulsation du correcteur de ω_m à ω_1 . En d'autres termes, nous cherchons à établir l'égalité : **$\omega_m = \omega_1$** .

Etape 2 : Nous calculons la phase φ_m à ajouter à la pulsation ω_1 afin de satisfaire l'exigence de la marge de phase, comme indiqué dans la relation suivante :

$$MP = 180 + \varphi(j\omega_1) = 180 + \varphi(C(j\omega_1)) + \varphi(K(j\omega_1)) + \varphi(H(j\omega_1)) \quad \text{avec} \quad \varphi_m = \varphi(C(j\omega_1))$$

$$D'où : \varphi_m = MP - 180 - \varphi(K(j\omega_1)) - \varphi(H(j\omega_1)) \Rightarrow \boxed{\varphi_m = MP - 180 - \varphi[K(j\omega_1) \cdot H(j\omega_1)]}$$

Etape 3 : Une fois la phase φ_m calculée, nous pouvons déterminer le premier paramètre du correcteur, qui est "a", comme suit : on a $\varphi_m = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \Rightarrow \boxed{a = \frac{1 + \sin(\varphi_m)}{1 - \sin(\varphi_m)}}$

Etape 4 : Une fois la phase « a » calculée, nous pouvons déterminer le deuxième paramètre du correcteur, qui est "Td", comme suit : on a $\omega_m = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{a} T_d} \Rightarrow T_d = \frac{1}{\omega_1 \sqrt{a}}$

Etape 5 : on calcul la valeur du gain K_p du correcteur pour que la FTBO corrigée ait bien un gain unitaire à la pulsation ω_1 . Soit : $|C(j\omega_1)| \cdot |K(j\omega_1)| \cdot |H(j\omega_1)| = 1 \Rightarrow K_p \cdot \sqrt{a} \cdot |K(j\omega_1)| \cdot |H(j\omega_1)| = 1$;

Donc : $\boxed{K_p = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot |K(j\omega_1) \cdot H(j\omega_1)|}}$

