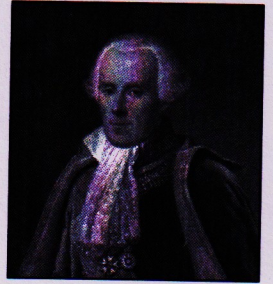


## Chapitre 12 : Transformée de Laplace

### I. Introduction

La résolution de problèmes physiques utilise souvent le remplacement des variables réelles par des développements dépendant de la fréquence ou des fonctions de la variable complexe. La transformée de Laplace, un outil clé en théorie des systèmes linéaires continus, et consiste à étudier le comportement des systèmes (caractérisé par des fonctions du temps  $t$ ) dans un domaine symbolique où la variable n'est plus le temps  $t$  mais une variable symbolique  $p$ , transformant ainsi  $f(t)$  en  $F(p)$ .



**Pierre-Simon Laplace**  
1749 – 1827  
Mathématicien, astronome,  
physicien et homme politique  
français

Ce cours offre des rappels sur la transformée de Laplace et certaines de ses applications, fournissant une base suffisante pour l'étude des systèmes avec cet outil mathématique puissant.

### II. Définition de transformée de Laplace $L(\cdot)$

Soit  $f(x)$  une fonction causale de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ .

On appelle transformée de Laplace la fonction  $F(p) = L(f(x))$  qui vérifie :  $F(p) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx$

**N.B :** On appelle fonction causale une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  dont le support est borné à gauche en 0 et  $f$  est nulle pour tout  $x < 0$ .

### III. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

On trouve ci-dessous la transformée de Laplace de quelques fonctions dites usuelles car elle est fréquemment rencontrée, sans s'attarder sur un développement mathématique relatives au calcul des intégrales.

#### 1. Fonction échelon unité $u(t)$

Cette fonction est donnée par :

$$\begin{cases} u(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \\ u(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

**Question :** montrer que  $U(p) = \frac{1}{p}$

→ On a :  $U(p) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-p \cdot t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-pt} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{-p} e^{-pt} \right]_0^x$

$\Leftrightarrow U(p) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-px}$

$\Leftrightarrow$  d'où :  $U(p) = \frac{1}{p}$

#### 2. Fonction puissance

$f(t) = t^n, n \in \mathbb{N}^* \rightarrow$  On a :  $F(p) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-p \cdot t} dt$

$\Rightarrow F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$

#### 3. Fonction exponentielle

$g(t) = e^{at} \rightarrow$  On a :  $G(p) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-p \cdot t} dt$

$\Rightarrow G(p) = \frac{1}{p - a}$

### IV. Quelques propriétés de la transformée de Laplace

- Superposition et linéarité :  $L[\alpha f_1(p) + \beta f_2(p)] = \alpha L[f_1(p)] + \beta L[f_2(p)]$
- Théorème de la dérivée :  $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot F(p) - f(0^+)$  de même  $L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0^+) - f'(0^+)$   
Pour généraliser :  $L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0^+) - p^{n-2} \cdot f^{(1)}(0^+) - p^{n-3} \cdot f^{(2)}(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$
- Théorème de la valeur initiale :  $v_i = f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$
- Théorème de la valeur finale :  $v_f = f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$

### V. Table de la transformée de Laplace

Dans le tableau suivant, on fournit une table pour le besoin de la théorie des systèmes continus linéaires, elle contient les transformées de Laplace des fonctions les plus usuelles.

Dans la plupart des applications des cours d'automatique, c'est souvent la transformée inverse qui est utilisée.

Fonctions dans le domaine temporel	Fonctions dans le domaine de Laplace
Echelon unité : $u(t)$	$U(p) = \frac{1}{p}$
Echelon d'amplitude : $e(t) = E \cdot u(t)$	$E(p) = \frac{E}{p}$
Rampe unité : $r(t) = t \cdot u(t)$	$R(p) = \frac{1}{p^2}$
Fonction 1 <sup>er</sup> ordre : $s(t) = (1 - e^{-t/\tau}) \cdot u(t)$	$S(p) = \frac{1}{p(1 + \tau p)}$
Fonction 2 <sup>ème</sup> ordre type 1 : $s(t) = (1 - (1 + \frac{t}{\tau}) e^{-t/\tau}) \cdot u(t)$	$S(p) = \frac{1}{p(1 + \tau p)^2}$
Fonction 2 <sup>ème</sup> ordre type 2 : $s(t) = (1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (\tau_1 \cdot e^{-t/\tau_1} - \tau_2 \cdot e^{-t/\tau_2})) \cdot u(t)$	$S(p) = \frac{1}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$
Fonction 2 <sup>ème</sup> ordre type 3 : $s(t) = (1 - \sin(\omega_p t + \varphi) \cdot \frac{e^{-m \omega_o t}}{\sqrt{1 - m^2}}) \cdot u(t)$	$S(p) = \frac{1}{p(1 + 2m \frac{p}{\omega_o} + (\frac{p}{\omega_o})^2)}$
Avec : $\omega_p = \omega_o \sqrt{1 - m^2}$ et $\varphi = \cos^{-1}(m)$ pour $m < 1$	

**Remarque :** la transformée inverse de Laplace ne fait pas partie du programme TSI, elle est employée pour les systèmes du premier et du second ordre afin d'illustrer et de tracer leur réponse temporelle.

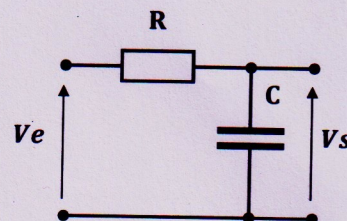
### VI. Applications : Fonction de transfert à partir des équations différentielles

L'un des applications de la transformée de Laplace est la résolution des équations différentielle, ainsi que la recherche de la fonction de transfert d'un système linéaire continu.

#### Exemple 1 : charge du condensateur - circuit RC

- L'équation différentielle régissant l'évolution de la tension de sortie  $v_s(t)$  :

$$v_s(t) + R \cdot i(t) = v_e(t) \text{ Et que } i(t) = C \frac{dv_s(t)}{dt} \rightarrow \text{d'où : } \boxed{R \cdot C \cdot \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = v_e(t)}$$



- On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle ci-dessus, on trouve :

$$RC \cdot p \cdot V_s(p) + V_s(p) = V_e(p) \rightarrow V_s(p) \cdot (RC \cdot p + 1) = V_e(p) \rightarrow V_s(p) = \frac{1}{1 + RC \cdot p} \cdot V_e(p)$$

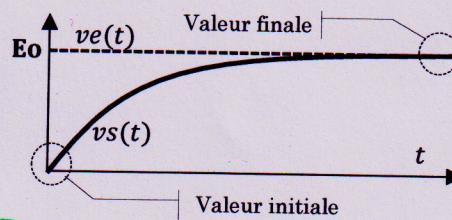
- La fonction de transfert s'exprime par  $H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$  :

$$\boxed{H(p) = \frac{1}{1 + RC \cdot p}}$$

### VII. Théorème de la valeur initiale et la valeur finale

Les théorèmes de la valeur initiale et finale permettent de déterminer les comportements initial et final d'un système à partir de sa transformée de Laplace, facilitant l'analyse des systèmes dynamiques.

- Théorème de la valeur initiale :  $v_i = \lim_{t \rightarrow 0} v_s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot V_s(p)$
- Théorème de la valeur finale :  $v_f = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot V_s(p)$



- Question 1 :** Pour l'exemple précédent, établir l'expression de  $V_s(p)$ .

On a :  $V_s(p) = H(p) \cdot V_e(p) \Rightarrow V_s(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \cdot V_e(p) \Rightarrow \text{avec } \tau = RC$

- Question 2 :** calculer la valeur initiale et finale, sachant que l'entrée est une tension continue d'amplitude E :  $V_e(t) = E_o \cdot u(t)$ .

**Valeur initiale :**  $V_i = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot V_s(p)$

**Valeur finale :**  $V_f = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot V_s(p)$

$$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot \frac{1}{1 + \tau p} \cdot \frac{E_o}{p} \Rightarrow V_i = 0$$

$$\Rightarrow V_f = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + \tau p} \cdot \frac{E_o}{p} \Rightarrow V_f = E_o$$

$$V_e(p) = \frac{E_o}{p}$$