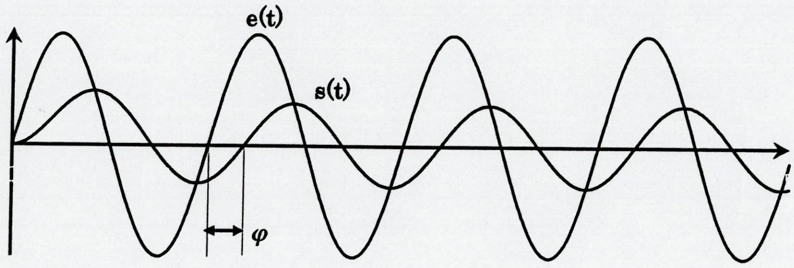
ANALYSE FREQUENCIELLE DES SYSTEMES LINEAIRES

I. Introduction

L'analyse fréquentielle permet de décrire le comportement fréquentiel d'un système, l'entrée maintenant est sollicitée à une excitation sinusoïdale $e(t) = Eo \sin \omega t$. La réponse permanente du système aussi de la forme sinusoïdale $e(t) = So \sin(\omega t + \varphi o)$ de même pulsation que le signal d'entrée mais d'amplitude So différente et déphasée par rapport au signal d'entrée d'un angle φo.



L'analyse fréquentielle consiste à étudier les variations du rapport des amplitudes du signal de sortie et du signal d'entrée, ainsi que le déphasage entre eux en faisant varier la fréquence f.

Dans cette analyse, l'amplitude du signal d'entrée est maintenue constante alors que le paramètre variable est la fréquence f ou les pulsations $\omega = 2\pi F$.

1. La fonction de transfert complexe H(jω)

La fonction de transfert d'un système linéaire continu dans le domaine de Laplace est défini par : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ où E(p) est l'entrée et S(p) est la sortie.

La fonction de transfert complexe obtenue en remplaçant la variable de Laplace p par le terme jω (imaginaire pur). La fonction de transfert complexe est donc : H(jω). L'analyse fréquentielle consiste à étudier H(jω) en fonction de ω.

Exemple :

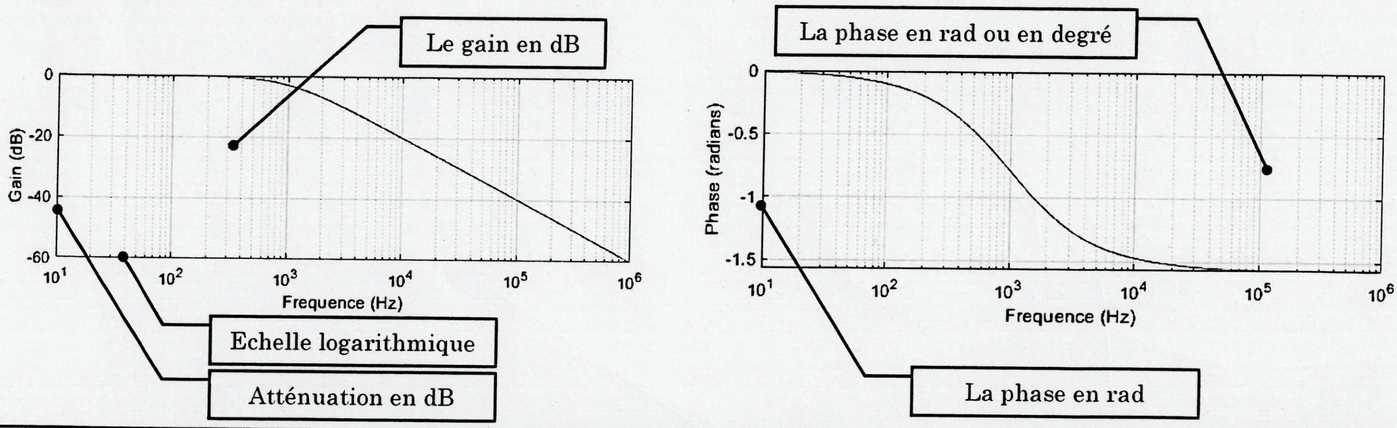
Un système linéaire dans le domaine de Laplace est défini par la fonction de transfert suivante : $H(p) = \frac{\tau 1\, p}{(1+\tau 2p)(1+\tau 3\, p)}$

La fonction de transfert complexe est alors : $H(j\omega) = \frac{\tau_1 j\omega}{(1+\tau_2 j\omega)(1+\tau_3 j\omega)}$ ....

2. Lieux de transfert.

Les lieux de transfert correspondent à la représentation graphiques de H(jω). On distingue principalement trois représentations graphiques : lieu de transfert dans le plan de Bode, de Nyquist et de Black. On se limite dans ce cours seulement à la représentation dans le plan de Bode.

Le diagramme de Bode représente séparément le module $|H(j\omega)|$ et la phase $\varphi = \arg[\ H(j\omega)\ ]$ de la fonction H(jω) en fonction de w. comme le montre la figure suivante :

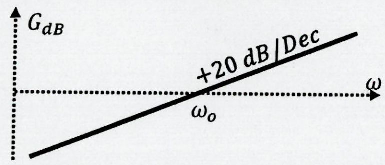
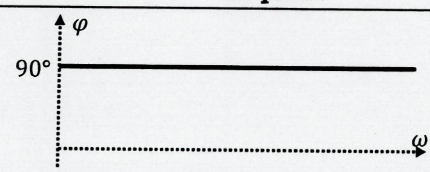
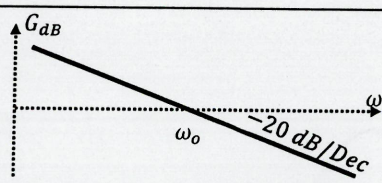
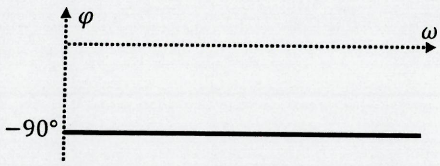
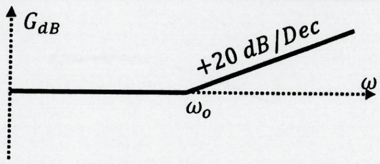
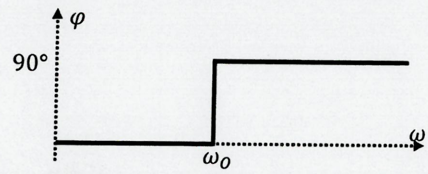
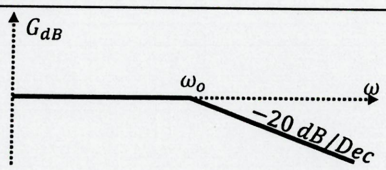
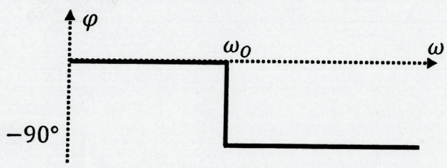
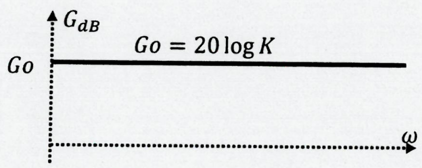
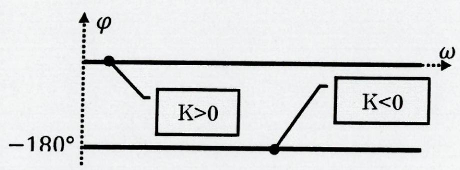


Question : comment tracer le diagramme de Bode pour une fonction de transfert complexe ?

Il y a deux façons de faire :

- La première est de trouver les expressions mathématiques du module et de la phase, puis en remplaçant la pulsation ω avec les différentes images de pulsation $(0, \omega o, 2\omega o, 3\omega o, \ldots, +\infty)$. Ensuite, nous suivons ses points pour trouver le diagramme de Bode.
- La seconde s'appelle la méthode du modèle. Il consiste à reformuler la fonction de transfert pour la rendre plus proche des formes les plus connues. Une somme logarithmique donne enfin le diagramme Bode.

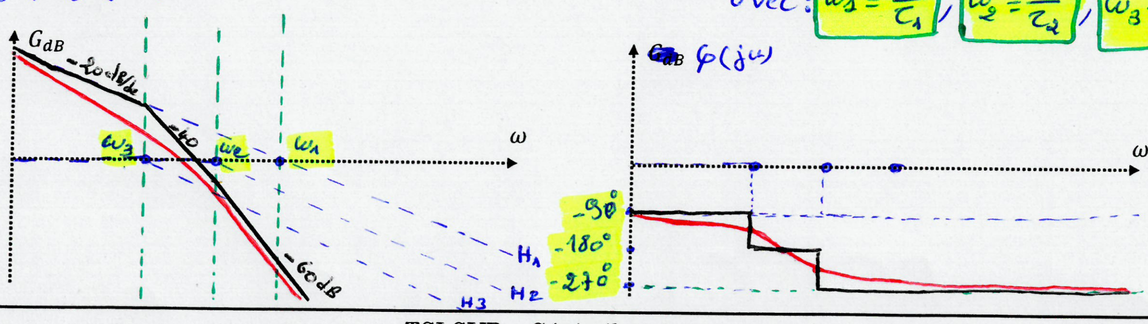
Dans le tableau ci-après, nous retrouvons les cinq (5) formes les plus courantes :

Forme	Digramme de Bode	
	Le Gain	La phase
$H(jw) = j\frac{\omega}{\omega o}$		
$H(jw) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega o}}$		
$H(jw) = 1 + j\frac{\omega}{\omega o}$		
$H(jw) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega o}}$		
$H(jw) = K$		

Exemple : tracer le diagramme de Bode pour la fonction de transfert suivante : $H(p) = \frac{\tau 1\, p}{(1+\tau 2 p)(1+\tau 3\, p)}$

$$H(j\omega) = \frac{\tau_1 j\omega}{(1+\tau_2 j\omega)(1+\tau_3 j\omega)} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{(1+j\frac{\omega}{\omega_2})(1+j\frac{\omega}{\omega_3})} \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}\right)\times\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_3}}\right)}$$

si : $\omega_3 < \omega_2 < \omega_1$ avec : $\boxed{\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}}$, $\boxed{\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}}$, $\boxed{\omega_3 = \frac{1}{\tau_3}}$



II. Etude fréquentielle d'un système 1er ordre

On rappelle que la fonction de transfert d'un système du premier est de la forme : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$

1. Fonction de transfert complexe.

On remplace p = jω → la fonction de transfert complexe H(jω) : $H(j\omega) = \frac{k}{1+\tau j\omega}$

$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{k}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}}$

- La pulsation de coupure ωc : $\boxed{\omega_c = \frac{1}{\tau}}$
- Le module de H(jω) : $\boxed{|H(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}}$
- La phase $\varphi(j\omega)$: $\varphi = 0 - \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

$\boxed{\varphi(j\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega/\omega_c)}$

2. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est le diagramme du gain et de la phase en fonction de la pulsationω. Tout d'abord, il faut exprimer le gain et la phase de la fonction de transfert précédente en fonction de la pulsation :

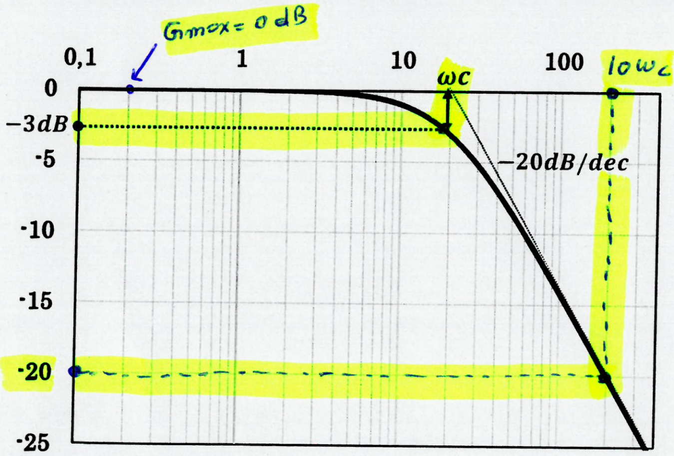
Le gain : $G_{dB} = 20\log(|H(j\omega)|) \Rightarrow \boxed{G_{dB} = 20\log\left(\frac{k}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}}\right)}$

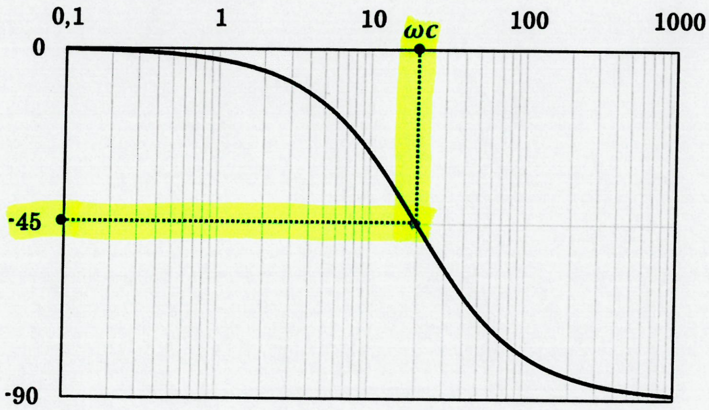
La phase : $\boxed{\varphi(j\omega) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$

Pour le tracer, on calcule le gain pour les différentes pulsations comme le montre dans le tableau suivant :

Pulsation	Le module |H|	Le gain G en dB	La phase φ (°)
$\omega = 0$	$\|H\| = K$	$G = 20\log_{10}\|H\| \Rightarrow G_{max} = 20\log K$	$\varphi = 0$
$\omega = \omega_o$	$\|H\| = \frac{k}{\sqrt{2}}$	$G = G_{max} - 3dB$	$\varphi = -45°$
$\omega = 10\,\omega_o$	$\|H\| \simeq \frac{k}{10}$	$G = G_{max} - 20dB$	$\varphi \simeq -84°$
$\omega = +\infty$	$\|H\| \simeq$	$G = G_{max} - X \rightarrow -\infty$	$\varphi = -90°$

Le diagramme de Bode suivant pour $K = 1$ *et* $\tau = 0.05$ → $\omega c = 20\frac{rad}{s}$ → $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega c}}$





Remarques importantes :

- La pulsation de coupure du système 1er ordre est située au gain Gmax – 3dB.
- La pulsation de coupure en système 1er ordre se trouve à la phase -45°.

III. Etude fréquentielle d'un système 2ème ordre

On rappelle que la fonction de transfert d'un système du premier est de la forme : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}p^2 + \frac{2m}{\omega_n}p + 1}$

Avec : K est le gain statique, m est le facteur d'amortissement et ω_n est la pulsation propre du système (rad/s)

1. Fonction de transfert complexe.

On remplace p = jω ➔ la fonction de transfert complexe H(jω) : $H(j\omega) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2 + \frac{2m}{\omega_n}j\omega + 1}$

$\Longleftrightarrow H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) + 2mj\frac{\omega}{\omega_n}}$

- Le module de H(jω) : $\boxed{|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2m\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}}$
- La phase $\varphi(j\omega)$: $\boxed{\varphi = -\operatorname{arctg}\left(\frac{2m\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)}$

2. Diagrammes de Bode d'un système de second ordre

Le traçage de diagramme de Bode n'est plus basé directement sur la méthode de modèle, mais cette fois-ci, il dépond plus du coefficient d'amortissement m.

Ensuite, nous avons besoin d'examiner le dénominateur polynôme D (p) : $D(p) = 1 + 2m\frac{p}{\omega_n} + \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2$

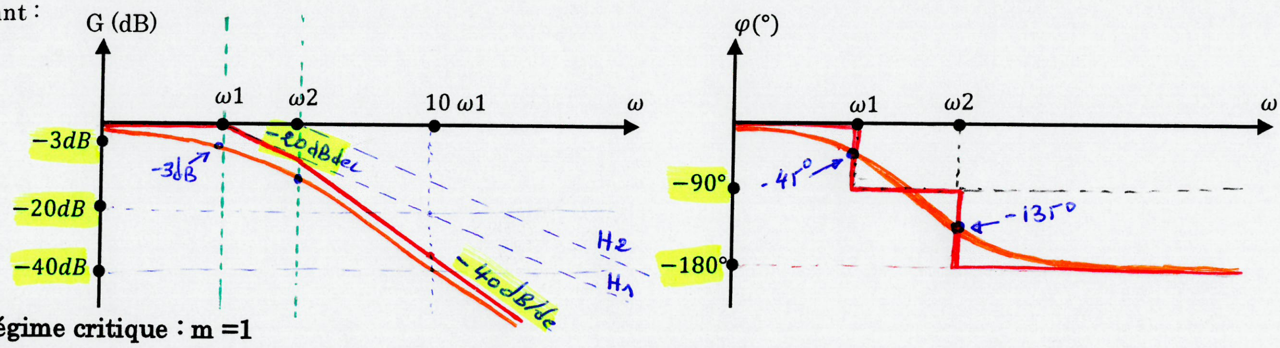
- On pose X = p ➔ $D(X) = 1 + 2m\frac{X}{\omega_n} + \left(\frac{X}{\omega_n}\right)^2$ et notant X1 et X2, les solutions de polynôme de D(X) .
- Calculons le discriminant : $\Delta = \frac{4}{\omega_n^2}(m^2 - 1)$

On peut donc citer trois cas d'étude selon m : $m > 1$, $m = 1$ et $m < 1$.

2.1. Régime apériodique : $m > 1$

Il y a deux racines réelles : $\omega_1 = m\omega_n - \omega_n\sqrt{m^2-1}$ et $\omega_2 = m\omega_n + \omega_n\sqrt{m^2-1}$. La fonction de transfert est alors s'écrit : $H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} = A.H1(j\omega).H2(j\omega)$

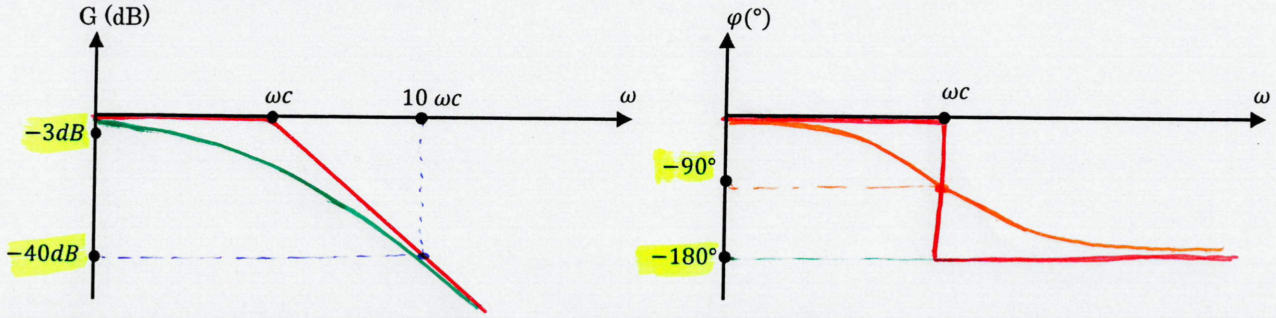
Les fonctions H1 et H2 sont deux fonctions de 1er ordre de pulsation de coupure ω_1 et ω_2. Le digramme de Bode est le suivant :



2.2. Régime critique : m =1

Il y a deux racines réelles doubles : $\omega_c = m\omega_n$. La fonction de transfert est alors s'écrit : $H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$

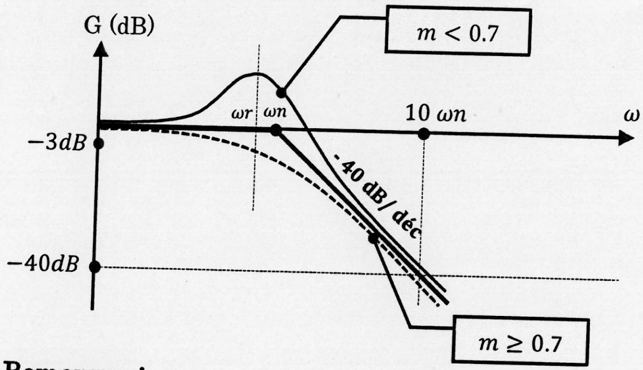
Le digramme de Bode est le suivant :

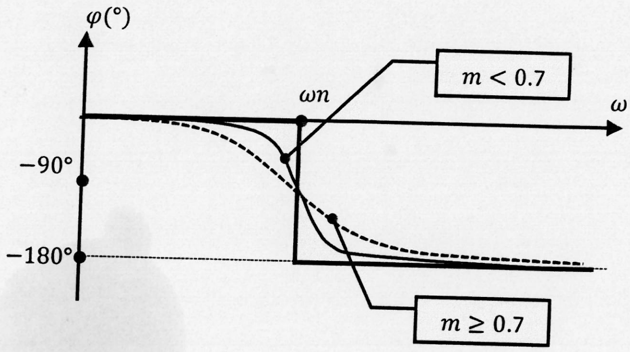


2.3. Régime pseudopériodique : $m < 1$

Dans ce cas, les racines sont toutes imaginaires : $\omega_1 = m\omega_n - j.\omega_n\sqrt{1-m^2}$ et $\omega_2 = m\omega_n + j.\omega_n\sqrt{1-m^2}$.

Le diagramme de Bode est le suivant :





Remarque :

- La réponse en gain du système présente une résonnance à la pulsation de résonnance $\boldsymbol{\omega_R}$ à $\boldsymbol{m < 0.7}$. Cette pulsation s'exprime par : $\boldsymbol{\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2m^2}}$.
- Le gain maximal (situé à la pulsation de résonance $\boldsymbol{\omega_R}$) s'exprime par : $G_R = 20\log Hmax$ avec $Hmax = \frac{K}{2m\sqrt{1-m^2}}$.

Pour plus d'information pour ce régime, donc voir l'annexe.