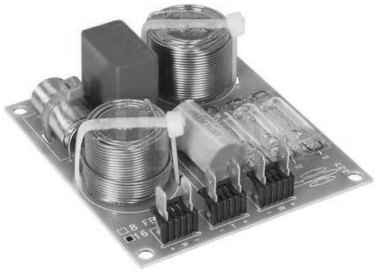
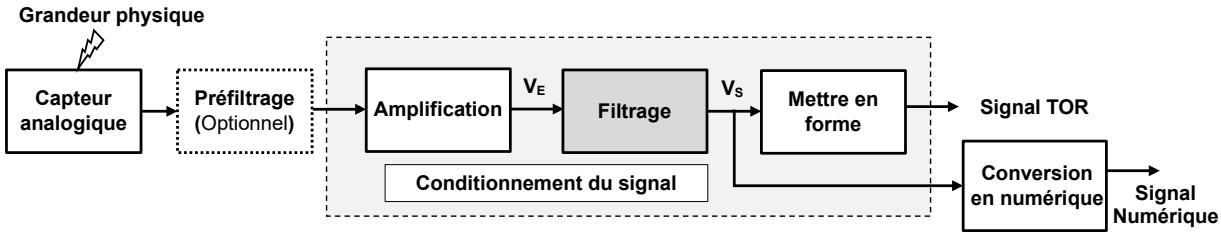
Chapitre 18 : Filtres analogiques passifs

I. Introduction

Dans une chaîne d'acquisition, le signal fourni par un capteur contient l'information utile, mais il peut également être perturbé par différents **bruits électriques**. Ces perturbations peuvent être transmises par **conduction**, comme celles provenant du réseau électrique 50 Hz, des alimentations à découpage ou des commutations de puissance. Elles peuvent aussi être **rayonnées**, notamment par les émetteurs radiofréquences, les moteurs, les transformateurs, les onduleurs ou les hacheurs.





Le **filtrage** consiste alors à **conserver les composantes fréquentielles utiles du signal** et à atténuer les fréquences indésirables. Il constitue ainsi une fonction essentielle du conditionnement du signal avant son amplification, sa conversion ou son traitement.


Otto Julius Zobel
1887 -1970

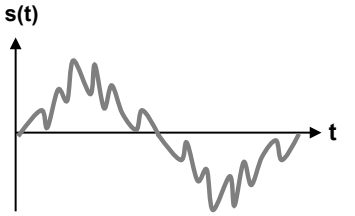
Les filtres électriques se sont fortement **développés au début du XXe siècle**, notamment grâce aux travaux de **George A. Campbell** puis **d'Otto J. Zobel**. En **1923, Zobel** a largement contribué à la théorie et à la conception des filtres utilisés en **télécommunications**. Pendant de nombreuses années, ces filtres ont été principalement réalisés à partir de composants passifs tels que les résistances, les inductances et les condensateurs, puis à l'aide de composants résonants comme les quartz.

II. Notions de bases des filtres analogiques

1. Constitutions d'un signal électrique

La fonction de filtrage fréquentiel consiste à atténuer ou supprimer les composantes de fréquences indésirables, tout en conservant, voire en amplifiant, celles correspondant aux fréquences utiles.

Tout signal périodique peut être décomposé, grâce à la série de Fourier, en une somme de composantes sinusoïdales de fréquences différentes.

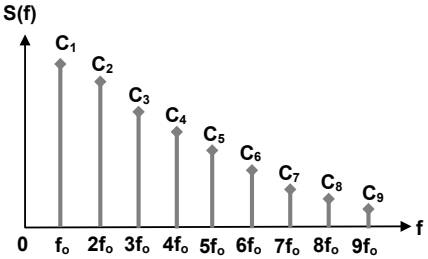


Signal temporel

Série de Fourier :

$$S(t) = a0 + \sum_{n=1}^{+\infty} An.\cos(n\,\omega t) + Bn\sin(n\,\omega t)$$

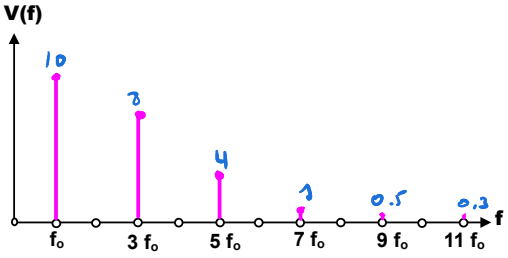
Avec : $Cn = \sqrt{An^2 + Bn^2}$



régime fréquentiel

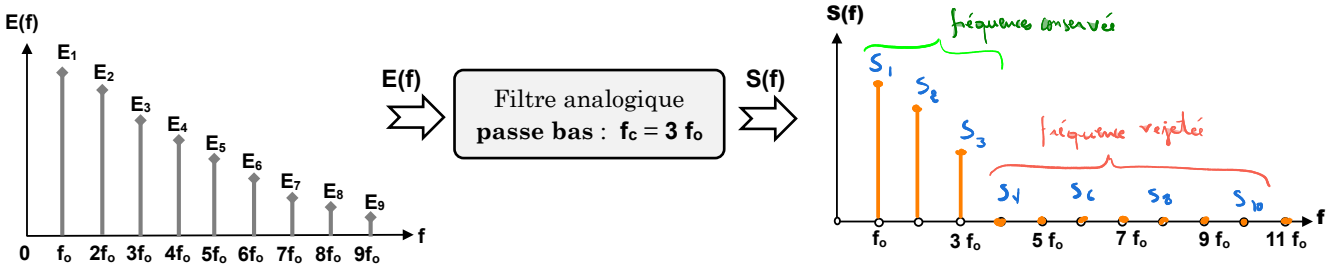
Exemple :

Soit : $v(t) = 10\sin(\omega_o t) + 8\sin(3\omega_o t) + 4\sin(5\omega_o t) + 1\sin(7\omega_o t) + 0.5\sin(9\omega_o t) + 0.3\sin(11\omega_o t)$



- **Question :** Tracer le spectre de signal V(f).

Pour mieux comprendre l'effet du filtrage, considérons par exemple un filtre de fréquence de coupure : $f_c = 3f_0$



Après filtrage, le spectre du signal de sortie est modifié : les composantes fréquentielles situées au-delà de f_c sont fortement **atténuées**, tandis que les composantes de fréquences inférieures sont **conservées** (cas d'un **filtre passe bas**).

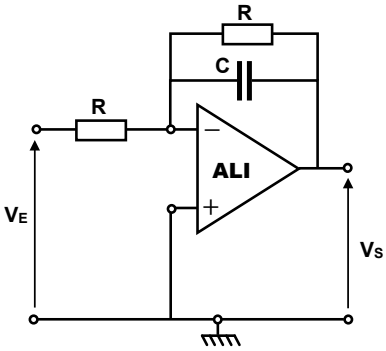
Remarque : Dans le cas d'un filtre idéal, les composantes de fréquence $f \leq 3f_0$ sont transmises, alors que celles de fréquence $f > 3\,f_0$ sont rejetées.

2. Types de filtrage

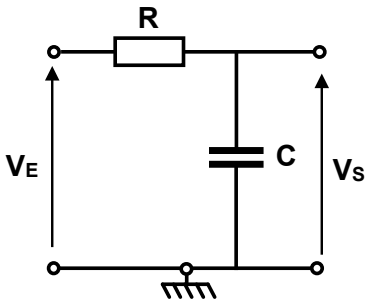
Les filtres peuvent être classés en deux grandes catégories : analogiques et numériques. Un filtre analogique agit directement sur un signal électrique continu à l'aide de composants tels que les résistances, condensateurs, inductances et amplificateurs opérationnels. Un filtre numérique traite, quant à lui, un signal échantillonné à l'aide d'un algorithme exécuté par un microcontrôleur, un DSP ou un ordinateur.

Filtrage analogique avec composants linéaires :

- Filtres passifs utilisant des composants discrets R, L et C ;
- Filtres actifs utilisant des composants discrets R, L, C et ALI.



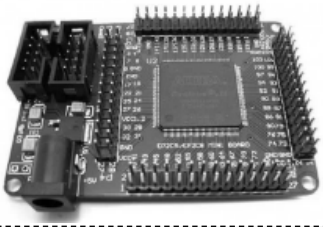
Filtre actif

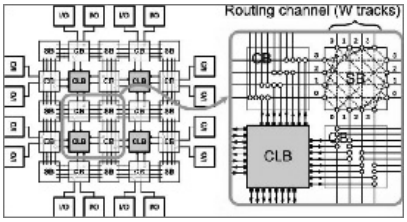


Filtre passif

Filtrage numérique avec composant programmable

Par DSP (Digital Signal Processor : processeur de signal numérique) ; ou les circuits logiques programmables FPGA



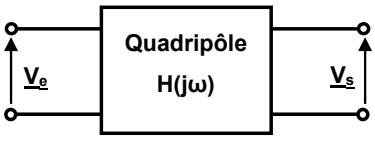


Note : *En Génie électrique (GE), nous étudierons les filtres passifs, puis les filtres numériques après le chapitre consacré aux convertisseurs CAN/CNA. Les filtres actifs, quant à eux, ont déjà été abordés dans le cours de physique.*

3. Notions mathématiques

Un filtre peut être modélisé par un quadripôle caractérisé par :

- Une tension d'entrée V_e;
- Une tension de sortie V_s;
- Une transmittance, appelée aussi fonction de transfert : $H(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)}$



Remarque : L'étude des filtres repose principalement sur le **diagramme de Bode**, qui représente le **gain** (module) et la **phase** (argument) de la fonction de transfert **H(jω)** en fonction de la pulsation **ω**. Une bonne maîtrise de cette partie nécessite quelques prérequis mathématiques, notamment les **nombres complexes** et les **fonctions logarithmiques en base 10**.

Rappel mathématique : *les nombres complexes*

Soit **Z= a + j b** , un nombre complexe avec **Z** ∈ **C** et nous supposons que les variables **a** et **b** sont positives

- Module de **Z** : **r = |Z|** = $\sqrt{a^2 + b^2}$
- Argument de **Z** : **φ = arg(Z)** = $\arctg\left(\frac{b}{a}\right)$
- Représentation vectorielle de **Z** (voir ci-contre)

Différentes formes pour écrire le complexe **Z** :

- **Forme Trigonométrique :** $Z = r\,(\cos(\varphi) + j.\sin(\varphi))$
- **Forme polaire :** $Z = [r, \varphi]$
- **Forme exponentielle :** $Z = r\,e^{j\varphi}$.

[r1 , θ1] . [r2 , θ2]	[r1,θ1] / [r2,θ2]	θ = arctg ($\frac{b}{a}$) Avec a = 0^+	Arctg(± 1)	Arctg(± ∞)
[r1.r2 , θ1+ θ2]	$\left[\frac{r1}{r2}\ ,\ \theta1-\theta2\right]$	Si b > 0 ➔ θ = $\frac{\pi}{2}$ et si b < 0 ➔ θ = $-\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{2}$

Rappel mathématique : *les Fonctions Logarithmes de base 10*

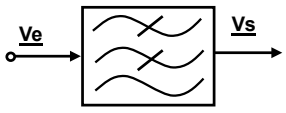
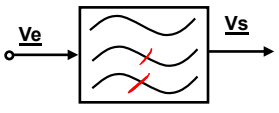
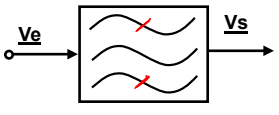
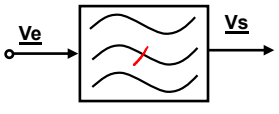
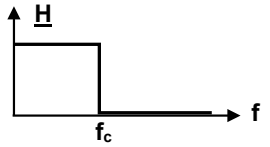
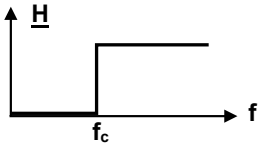
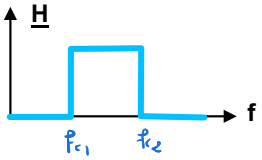
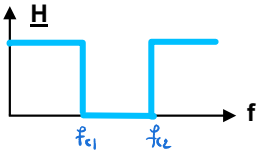
La fonction logarithme de base 10 est la fonction définie par : ∀ x ∈]0 ; +∞[tel que $\log_{10} x = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

Propriété : ∀ x ∈] 0 ; +∞[et ∀ y ∈] 0 ; +∞[

○ $\log_{10} x.y = \log_{10} x + \log_{10} y$	○ $\log_{10} 1 = 0$
○ $\log_{10} x^b = b\ \log_{10} x$	○ $\log_{10} 10 = 1$, $\log_{10} 10^b = b$,
○ $\log_{10} x/y = \log_{10} x - \log_{10} y$	○ $\log_{10} x = b \Leftrightarrow x = 10^b$

4. Classification des filtres analogiques

Selon l'allure du **module H(jω)** de la fonction de transfert, les filtres sont classés en **quatre grandes catégories** :

Passe bas	Passe haut	Passe bande	Coupe bande
			
			
BP = [**0**, f_c]	BP = $[f_c, +\infty[$	B = $[f_{c1}, f_{c2}]$	BP = $[0, f_{c1}] \cap [f_{c2}, +\infty[$

L'objectif du filtrage est de **sélectionner une fréquence ou une plage de fréquences**, appelée **bande passante (BP)** et exprimée en hertz (Hz). Cette bande est délimitée par une ou plusieurs **fréquences de coupure f_c**, qui définissent selon le type de filtre la **limite inférieure**, la **limite supérieure**, ou les deux limites de la bande passante.

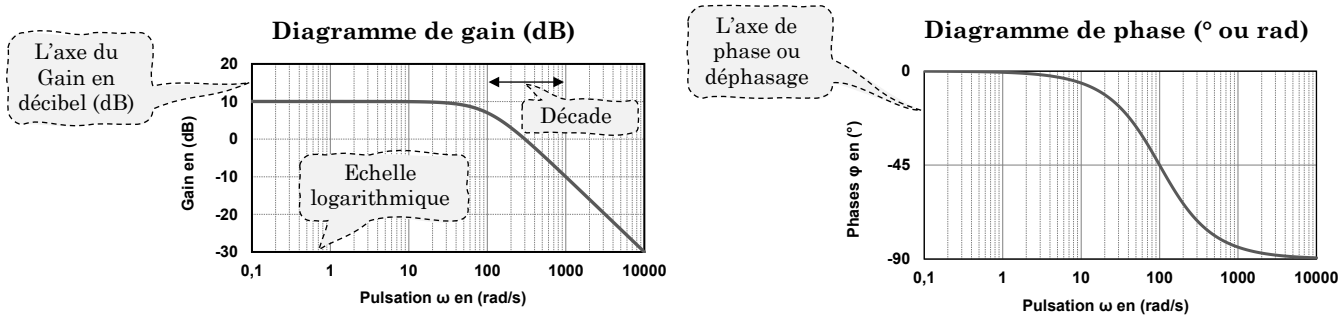
5. Lieux de transfert

Les lieux de transfert permettent de représenter graphiquement la fonction de transfert complexe **H(jω)**. On distingue principalement trois représentations : les diagrammes de **Bode**, de **Nyquist** et de **Black**. Dans ce cours, nous nous limiterons à l'étude du diagramme de Bode.

Le diagramme de Bode est constitué de deux courbes représentant séparément, en fonction de la pulsation **ω** :

- Le module, généralement exprimé sous forme de gain en décibels : **| H(jω) |**
- L'argument, correspondant à la phase de H(jω) : **φ (H(jω)) = arg(H(jω))**

Ces deux représentations permettent d'analyser le comportement fréquentiel du filtre, comme le montre la figure suivante :

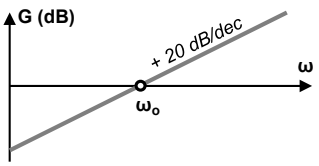
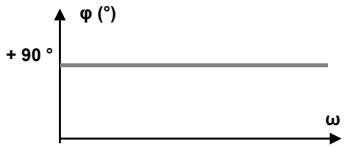
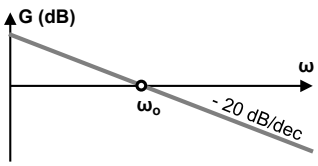
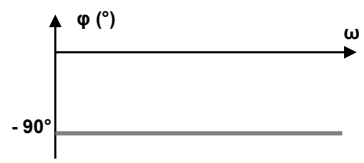
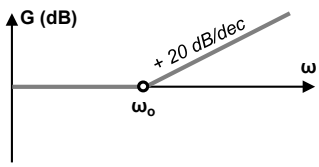
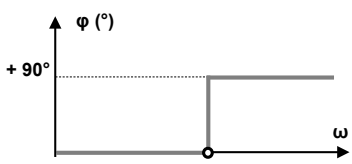


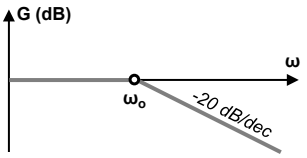
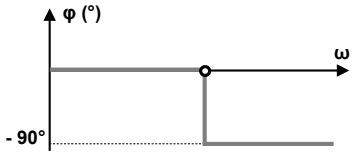
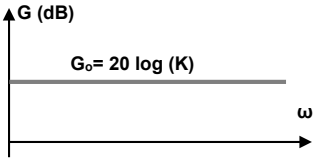
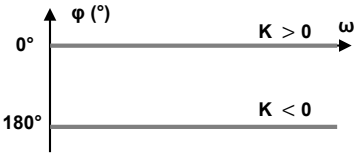
Question : Comment **tracer** le diagramme de Bode d'une fonction de transfert complexe ?

Deux méthodes principales peuvent être utilisées.

- La première consiste à déterminer les expressions du **module** et de la **phase** de **H(jω)**, puis à les calculer pour différentes valeurs de la pulsation ω, par exemple **0**, ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$, … jusqu'à des valeurs très élevées. Le tracé des points obtenus permet alors de construire le diagramme de Bode.
- La seconde, appelée **méthode des formes canoniques**, consiste à décomposer la fonction de transfert en termes élémentaires connus. Le diagramme de Bode est ensuite obtenu par addition des contributions de chaque terme.

Remarque : Cette seconde méthode est **très utilisée** en électronique et en automatique, car elle permet un tracé **rapide**, **structuré** et suffisamment précis du diagramme de Bode.

Forme	Digramme de Bode	
	Diagramme de gain	**Diagramme de phase**
$H(j\omega) = j\,\frac{\omega}{\omega_o}$		
$H(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_o}}$		
$H(j\omega) = 1 + j\,\frac{\omega}{\omega_o}$		

Forme	Digramme de Bode	
	Diagramme de gain	Diagramme de phase
$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_o}}$		
$H(j\omega) = K$		

Exemple : Tracer le diagramme de Bode pour la fonction de transfert suivante : $\mathbf{H(j\omega)} = \frac{\tau_1 j\omega}{(1 + \tau_3 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega)}$ sachant que $\tau_1 =$ **0.5 s**, $\tau_2 =$ **0.1 s** et $\tau_3 =$ **0.025s.**

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{1/\tau_1}}{(1+j\frac{\omega}{1/\tau_2})(1+j\frac{\omega}{1/\tau_3})}$$

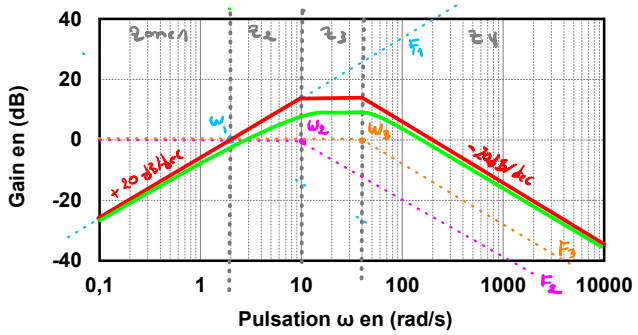
$$H(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{(1+j\frac{\omega}{\omega_2})(1+j\frac{\omega}{\omega_3})} = \left(j\frac{\omega}{\omega_1}\right) \times \underbrace{\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}\right)}_{F_2} \times \underbrace{\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_3}}\right)}_{F_3}$$

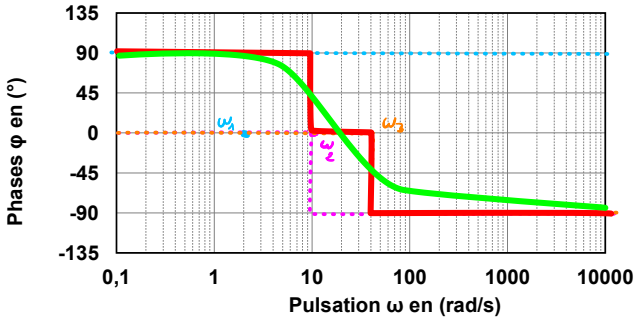
F_1

avec : $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1} = 2$ rad/s ; $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2} = 10$ rad/s

et $\omega_3 = \frac{1}{\tau_3} = 40$ rad/s

↳ $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$





III. Etude des filtres passifs de premier ordre

Les **filtres du premier ordre** correspondent principalement aux structures **passe-bas** et **passe-haut**. Les filtres **passe-bande** et **coupe-bande** nécessitent au minimum un **ordre deux**, car leur réalisation impose la présence de deux fréquences caractéristiques.

Objectif : Dans cette partie, nous étudierons les différentes structures de filtres, déterminerons leur **fonction de transfert complexe H(jω)**, puis tracerons leur **diagramme de Bode** en gain et en phase. Enfin, nous appliquerons un signal périodique $\mathbf{V_e(t)}$ à l'entrée du filtre afin de déterminer le signal de sortie $\mathbf{V_s(t)}$.

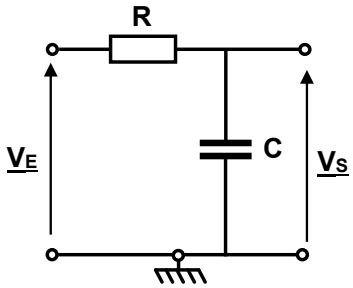
On distingue deux formes canoniques de filtres du premier ordre :

Filtre passe bas	Filtre passe haut
$H(j\omega) = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$	$H(j\omega) = A \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$
A : le gain statique sans unité **ω_c :** la pulsation de coupure en rad/s ($\omega_c = 2\pi f_c$ avec f_c est la fréquence de coupure en Hz)	

1. Filtre passe bas

Schéma et fonction de transfert

Un **filtre passe-bas du premier ordre** peut être réalisé à l'aide d'un circuit **RC**, comme présenté sur le schéma ci-après.



Question : Déterminer la fonction de transfert du filtre et la mettre sous sa forme canonique : $\mathbf{H(j\omega)} = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

Expression **Vs** en fonction de **Ve**, **R** et **C** :

d'après le diviseur de tension : $\underline{V_s} = \underline{V_e}\,\frac{\underline{Z_c}}{\underline{Z_c} + \underline{Z_R}} \Rightarrow \underline{V_s} = \underline{V_e}\,\frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} \Rightarrow$ d'où : $\underline{V_s} = \underline{V_e}\,\frac{1}{1 + jRC\omega}$

La fonction de transfert $\mathbf{H(j\omega)} = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)}$: $H(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_E(j\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

Identification des paramètres **A** et ω_c:

Le gain statique **A** : $A = 1$, la pulsation de coupure ω_c : $\omega_c = \frac{1}{RC}$, la fréquence de coupure f_c : $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

$\omega_c = 2\pi f_c$

Diagramme de Bode

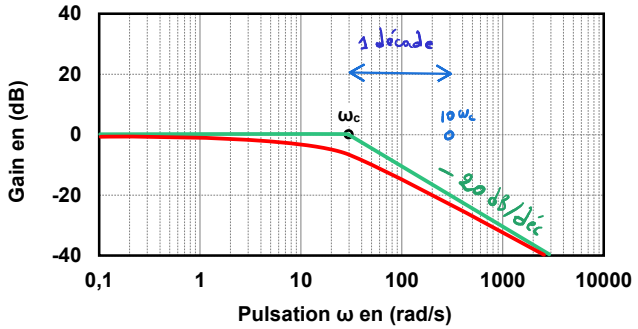
Le diagramme de Bode représente l'évolution du gain et de la phase d'un système en fonction de la pulsation ω du signal d'entrée. Pour le tracer, il faut d'abord déterminer les expressions du gain et de la phase de la fonction de transfert étudiée en fonction de ω.

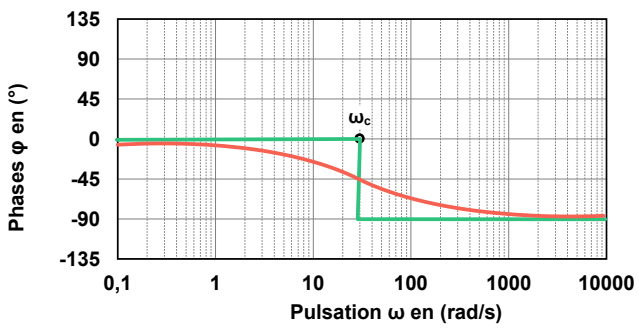
Le module de $\lvert H(j\omega)\rvert$	Le gain G	La phase φ (H(jω)) = arg(H(jω))
$\lvert H(j\omega)\rvert = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}}$	$G = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}\right)$	$\varphi(H(j\omega)) = 0 - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

On calcule le gain et la phase pour différentes valeurs de la pulsation ω, comme indiqué dans le tableau suivant.

Pulsation	Le module $\lvert H(j\omega)\rvert$	Le gain G en dB	La phase φ (H(jω)) (rad)
$\omega = 0$	$\lvert H\rvert = 1$	$G_0 = 20\log_{10}\lvert H\rvert \Rightarrow G_0 = 0$	$\varphi = 0$
$\omega = \omega_c$	$\lvert H\rvert = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G = G_0 - 3dB$	$\varphi = -\pi/4$
$\omega = 10\,\omega_c$	$\lvert H\rvert \approx \frac{1}{10}$	$G = G_0 - 20\,dB$	$\varphi = -1,74$
$\omega \gg \omega_c$	$\lvert H\rvert = \frac{1}{\omega/\omega_c}$	$G = G_0 - 20\log(\frac{\omega}{\omega_c}) \Rightarrow G = G_0 - X\,dB$	$\varphi \to -\frac{\pi}{2}$
$\omega = +\infty$	$\lvert H\rvert \to 0^+$	$G \to -\infty$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Diagramme de Bode est le suivant :





Remarque : Cette méthode est efficace et fiable, mais elle demande un temps de résolution important. Une approche plus avantageuse consiste à utiliser la **méthode des modèles**, qui repose sur la connaissance de cinq formes canoniques de base, présentées précédemment.

Exploitation du filtre

On souhaite filtrer un signal périodique $\mathbf{Ve(t) = 10 + 10\sin(\omega_c t) + 8\sin(10\omega_c t)}$. L'objectif est de calculer le signal de sortie Vs(t), Sachant que le module du filtre est $|\mathbf{H(j\omega)}| = \frac{A}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega c}\right)^2}}$ et que la phase est $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{arg}\left(\mathbf{H(j\omega)}\right) = -\mathbf{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega c}\right)$.

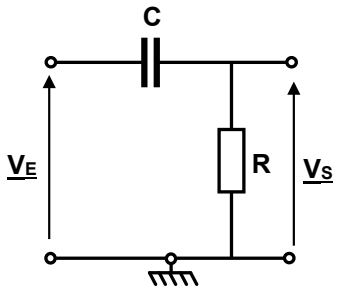
- **Question :** En appliquant la méthode de superposition, déterminer l'expression du signal de sortie **Vs(t)**. A = 1

Terme d'entrée	Pulsation	|H|	|H|×Vemax	φ	Terme de sortie Vs
10	$\omega = 0$	1	10	0	10
$10\sin(\omega_c t)$	$\omega = \omega_c$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	7.07	$-\frac{\pi}{4}$	$7.07\sin(\omega_c - \frac{\pi}{4})$
$8\sin(10\omega_c t)$	$\omega = 10\omega_c$	$\frac{1}{10}$	0.8	−1.47	$0.8\sin(10\omega_c - 1.47)$
Expression finale Vs(t) :	$V_s(t) = 10 + 7.07\sin(\omega_c - \pi/4) + 0.8\sin(10\omega_c - 1.47)$				

2. Filtre passe-haut

Schéma et fonction de transfert

Un **filtre passe-haut du premier ordre** peut être réalisé à l'aide d'un circuit **RC**, comme présenté sur le schéma ci-après.



Question : Déterminer la fonction de transfert du filtre et la mettre sous sa forme canonique : $\mathbf{H(j\omega)} = \mathbf{A}\frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$

- Expression **Vs** en fonction de **Ve**, **R** et **C** : D'après le diviseur de tension

$\underline{V_s} = \underline{V_e}\frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_c}+\underline{Z_R}} \Rightarrow \underline{V_s} = \underline{V_e}\frac{R}{\frac{1}{jC\omega}+R}$ d'où : $\underline{V_s} = \underline{V_e}\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$

- La fonction de transfert $\mathbf{H(j\omega)} = \frac{\mathbf{V_s(j\omega)}}{\mathbf{V_e(j\omega)}}$: $H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} = \frac{A\cdot j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$

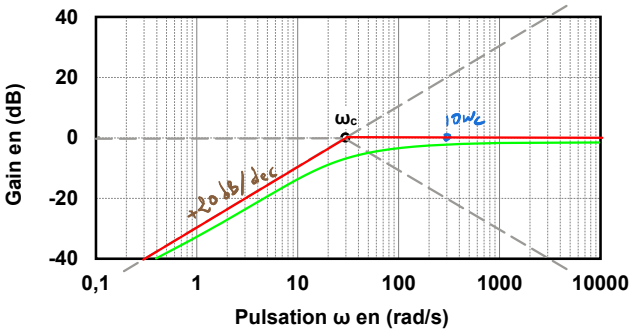
- Identification des paramètres **A** et $\boldsymbol{\omega_c}$:

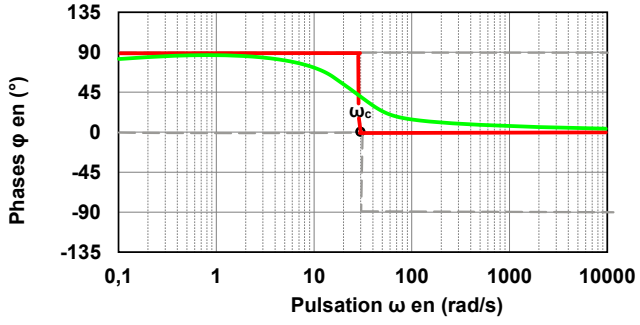
Le gain statique **A** : A = 1, la pulsation de coupure $\boldsymbol{\omega_c}$: $\omega_c = \frac{1}{RC}$, la fréquence de coupure $\mathbf{f_c}$: $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

Diagramme de Bode

Le tableau suivant illustre les expressions du gain et de la phase de la fonction de transfert étudiée en fonction de ω.

Le module de |H(jω)|	Le gain G	La phase φ (H(jω)) = arg(H(jω))
$\|H(j\omega)\| = A\frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}}$	$G = 20\log\left(A\frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}}\right)$	$\varphi = 90 - \text{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$





Exploitation du filtre

On souhaite filtrer un signal périodique **Ve(t) = 10 + 10 sin(ω_ct) + 8 sin(10ω_ct)**. L'objectif est de calculer le signal de sortie Vs(t), Sachant que le module du filtre est $|H(j\omega)| = A\frac{\frac{\omega}{\omega c}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega c}\right)^2}}$ et que la phase est $\varphi = 90° - \text{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega c}\right)$.

○ **Question :** En appliquant la méthode de superposition, déterminer l'expression du signal de sortie **Vs(t)**.

Terme d'entrée	Pulsation	|H|	|H|×Vemax	φ	Terme de sortie Vs
10	$\omega = 0$	0	0	90°	0
10 sin(ω_ct)	$\omega = \omega_c$	$1/\sqrt{2}$	7,07	45°	$7.07 \sin(\omega_c t + 45°)$
8 sin(10ω_ct)	$\omega = 10\omega_c$	1	8	6,3°	$8 \sin(10\omega_c t + 6.3°)$
Expression finale Vs(t) : $V_s(t) = 0 + 7{,}07 \sin(\omega_c t + 45°) + 8 \sin(10\omega_c + 6.3°)$					

IV. Étude des filtres passifs du deuxième ordre

Les filtres du deuxième ordre regroupent les différentes catégories de filtres : **passe-bas**, **passe-haut**, **passe-bande** et **coupe-bande**. Leur étude diffère légèrement de celle des filtres du premier ordre en raison de paramètres supplémentaires qui influencent leur comportement fréquentiel.

Dans cette section, nous nous limiterons à l'étude du **filtre passe-bas du deuxième ordre**, en conservant les mêmes objectifs que précédemment. Les autres types de filtres seront étudiés et approfondis lors des **travaux dirigés (TD)**.

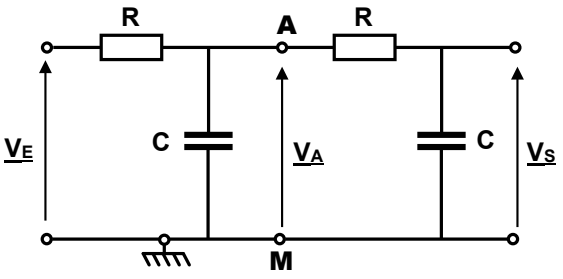
On distingue les formes canoniques des filtres de deuxième ordre :

Passe bas	Passe haut
$H(j\omega) = A\frac{1}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$H(j\omega) = A\frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$
Passe bande	**Coupe bande**
$H(j\omega) = A\frac{2mj\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$H(j\omega) = A\frac{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

- **A :** le gain statique (sans unité)
- **m :** le coefficient d'amortissement noté parfois **z** (sans unité)
- **ω_0** : la pulsation propre du système (en rad/s)

1. Structure du filtre et fonction de transfert

Il existe plusieurs structures permettant de réaliser un **filtre passe-bas du deuxième ordre**. Afin de simplifier l'étude, nous considérons ici la **structure en cascade**, représentée sur la figure suivante.

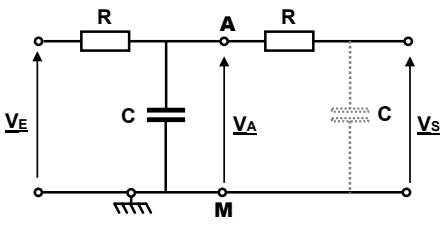


Pour déterminer la fonction de transfert de cette structure, il est nécessaire d'appliquer deux théorèmes fondamentaux : le **théorème de Milman** et le théorème du **diviseur de tension**.

Etape 1 : Application du théorème de MILMAN entre A et M

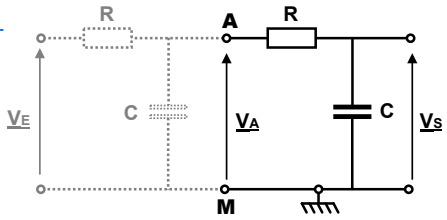
L'expression **(1)** de La tension **$\underline{V_A}$** :

$$\underline{V_A} = \frac{\frac{\underline{V_E}}{R} + \frac{\underline{V_S}}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC\omega} \Rightarrow \underline{V_A} = \frac{\underline{V_E} + \underline{V_S}}{2 + jRC\omega}$$



Partie 2 : Application du théorème de diviseur de tension à la sortie

- L'expression de La tension **$\underline{V_S}$** : $\underline{V_S} = \underline{V_A}\,\frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \underline{V_A}\,\frac{1}{1 + jRC\omega}$



- On peut déduire alors l'expression **(2)** de **$\underline{V_A}$** :

$$\underline{V_A} = \underline{V_S}\,(1 + jRC\omega)$$

- A partir des deux expressions (1) et (2), on obtient la fonction de transfert suivante :

$\underline{V_A} = \underline{V_S}(1 + jRC\omega) = \frac{\underline{V_E} + \underline{V_S}}{2 + jRC\omega}$; $\underline{V_S}(1 + jRC\omega)(2 + jRC\omega) = \underline{V_E} + \underline{V_S}$

d'où : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} = \frac{1}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$; $\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1 + 2m\,j\omega/\omega_0 + (j\omega/\omega_0)^2}$

- Ce filtre est un **passe-bas du deuxième ordre**. En comparant sa fonction de transfert à la **forme canonique correspondante**, on peut identifier les principaux paramètres du filtre : **A, m et ω_0**.

$A = 1$ | $\frac{2m}{\omega_0} = 3RC$ | $\frac{1}{\omega_0^2} = RC$

Le gain statique A	Le coefficient d'amortissement m	La pulsation propre ω_0
$A = 1$	$m = \frac{3}{2} = 1{,}5$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{RC}}$

2. Diagrammes de Bode d'un filtre passe-bas du deuxième ordre

Pour un filtre du deuxième ordre, l'allure du **diagramme de Bode** dépend du facteur d'amortissement **m**. Selon sa valeur, la fonction de transfert peut être mise sous une forme plus adaptée afin d'appliquer facilement la **méthode des modèles**.

Il est donc nécessaire d'étudier le polynôme du dénominateur : $\mathbf{D(j\omega) = \frac{1}{\omega_0^2}(j\omega)^2 + \frac{2m}{\omega_0}(j\omega) + 1}$

- En posant $\mathbf{x = j\omega}$, on obtient : $\mathbf{D(x) = \frac{1}{\omega_0^2}x^2 + \frac{2m}{\omega_0}x + 1}$
- Notons $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_2}$ les racines de ce polynôme. Son discriminant est : $\mathbf{\Delta = \frac{4}{\omega_0^2}(m^2 - 1)}$
- Le signe de **Δ** dépend donc directement de la valeur de **m**. On distingue ainsi **trois cas d'étude** :

$$\boxed{m > 1, \quad m = 1, \quad m < 1}$$

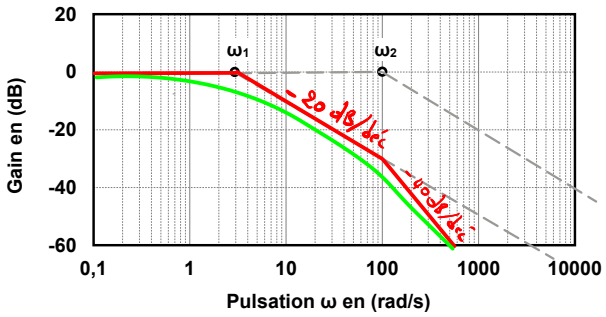
Pour chacun de ces cas, la forme du dénominateur et, par conséquent, la méthode de tracé du diagramme de Bode seront différentes.

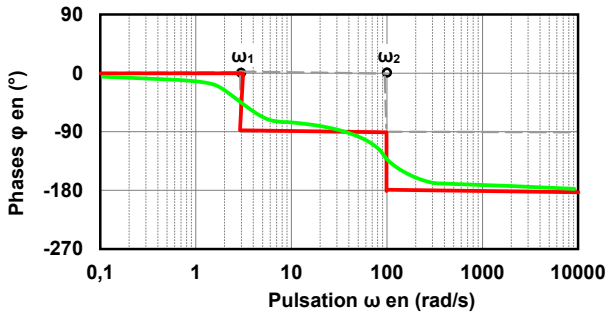
Cas 1 : Réponse apériodique (ou sur-amortie) : m > 1

Pour **m > 1**, le polynôme du dénominateur possède **deux racines réelles distinctes**, auxquelles correspondent les deux pulsations : $\omega_1 = \omega_o\left(m - \sqrt{m^2 - 1}\right)$ et $\omega_2 = \omega_o\left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)$ avec : $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$

La fonction de transfert peut alors être mise sous la forme : $H(j\omega) = \frac{A}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} \Rightarrow \mathbf{H(j\omega) = K.\,H1(j\omega).\,H2(j\omega)}$

Les fonctions **H1(jω)** et **H2(jω)** correspondent à **deux filtres passe-bas du premier ordre**, de pulsations de coupure respectives ω_1 et ω_2. Le diagramme de Bode global est obtenu en additionnant leurs contributions en **gain** et en **phase**, comme illustré sur la figure suivante.



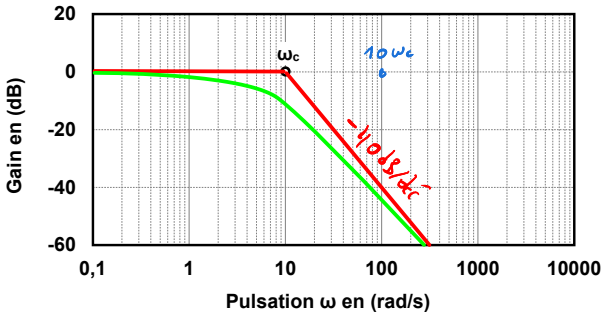


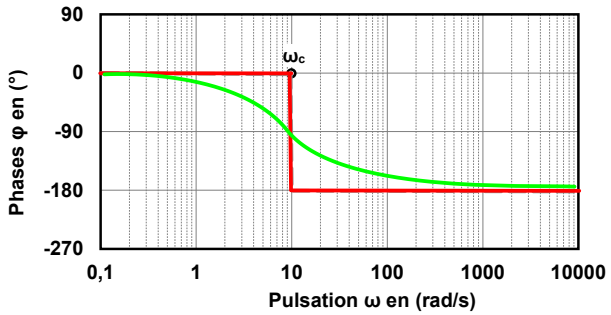
Cas 2 : Régime critique : m = 1

Pour $\mathbf{m = 1}$, le polynôme du dénominateur possède une racine réelle double. La pulsation correspondante est : $\boldsymbol{\omega_c = \omega_o}$

La fonction de transfert peut alors s'écrire sous la forme : $\mathbf{H(j\omega)} = \dfrac{A}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$

Cette fonction correspond à **deux filtres passe-bas du premier ordre identiques en cascade**, ayant la même pulsation de coupure $\boldsymbol{\omega_c = \omega_o}$. Le diagramme de Bode global est obtenu en additionnant deux fois leurs contributions en **gain** et en **phase**, comme illustré sur la figure suivante.



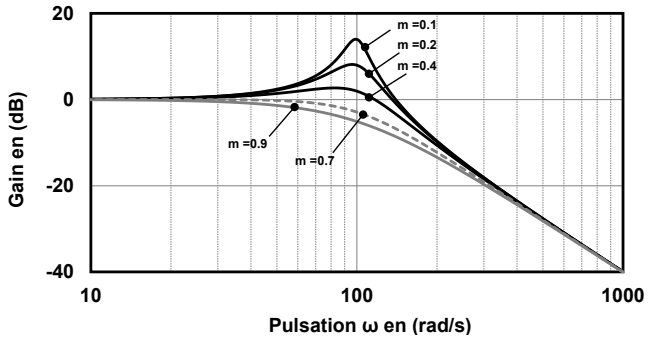


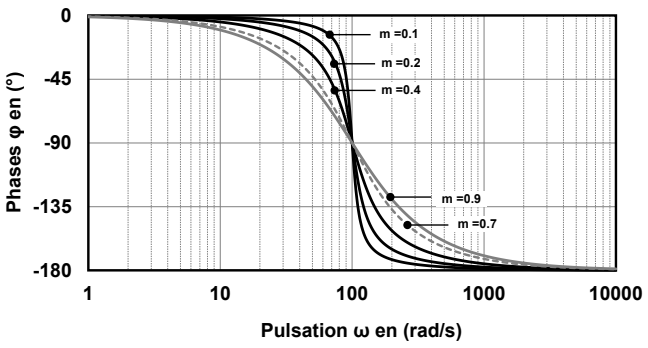
Cas 3 : Régime pseudopériodique : m<1

Pour $\mathbf{m < 1}$, le discriminant est négatif. Le polynôme du dénominateur possède donc deux racines complexes conjuguées, associées aux pulsations complexes : $\boldsymbol{\omega_1 = \omega_o}\left(\mathbf{m - j\sqrt{1 - m^2}}\right)$ et $\boldsymbol{\omega_2 = \omega_o}\left(\mathbf{m + j\sqrt{1 - m^2}}\right)$.

Dans ce cas, la fonction de transfert ne peut pas être décomposée en deux fonctions du premier ordre à coefficients réels. Le tracé du diagramme de Bode est donc réalisé directement à partir de la forme canonique du deuxième ordre.

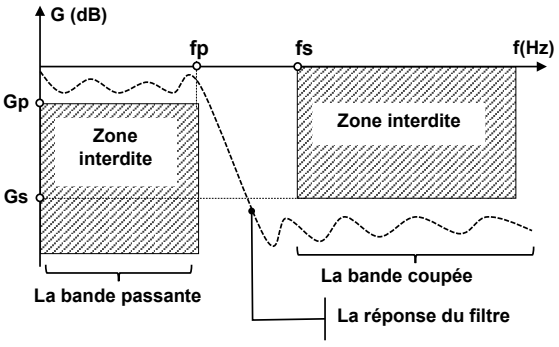
L'allure du gain dépend fortement de la valeur de **m** : lorsque l'amortissement est suffisamment faible, un **phénomène de résonance** peut apparaître au voisinage de la pulsation propre $\boldsymbol{\omega_o}$. Le diagramme de Bode correspondant est illustré sur la figure suivante.





V. Gabarit d'un filtre

En ingénierie électrique, **le gabarit** d'un filtre constitue un cahier des charges permettant de définir les performances fréquentielles que le filtre doit respecter. Il délimite les zones autorisées et interdites dans lesquelles doit évoluer la courbe du gain ou de l'atténuation en fonction de la fréquence.



En présentant dans la figure ci-après, le gabarit d'un filtre passe bas :

- La fréquence limite de la bande passante : $\mathbf{f_p}$.
- La fréquence limite de la bande coupée : $\mathbf{f_s}$.
- L'atténuation maximale admissible dans la bande passante : $\mathbf{G_p}$.
- L'atténuation minimale requise dans la bande coupée : $\mathbf{G_s}$.

Le gabarit permet également d'avoir une **idée sur l'ordre du filtre à concevoir**. Celui-ci peut être déterminé à l'aide de différentes méthodes d'approximation, telles que **Butterworth** ou **Tchebychev**, en fonction des performances imposées par le cahier des charges.

Références bibliographiques :

- **C. François**, Les grandes fonctions de la chaîne d'information - IUT, BTS, CPGE, FRANCE : Ellipses, 2016.
- **Pierre Tréhin**, Sciences industrielles de l'ingénieur (SII) - spécial ATS, Ellipses 2019.
- **Barrandon, L.**, **Réant, D.**, & **Arab Tehrani**, **K**. Maxi fiches : Électronique. Dunod, 2010.

A. OUAANABI (Version 2026/2027)

Génie électrique (TSI) – CPGE OUJD