Transformée de Laplace

I. Introduction

Plusieurs techniques utilisées dans la résolution de problèmes physiques sont fondées sur le remplacement de la variable réelle (temps ou distance) par certain développement dépondant de la fréquence ou par des fonctions de la variable complexe dépondant de la fréquence.

La transformée de Laplace est un outil mathématique très utilisé dans la théorie des systèmes linéaires continus. Elle consiste à étudier le comportement des systèmes (caractérisé par des fonctions du temps t) dans un domaine symbolique où la variable n'est plus le temps t mais une variable symbolique p. A toute fonction $f(t)$ correspondra sous réserve d'existence une fonction F(p) dans le domaine symbolique. Cette fonction sera image de f(t). Inversement sera appelée originale de $F(p)$

On présente dans ce cours quelques rappels sur la transformée de Laplace ainsi que certains de leurs applications, rappels qui sont suffisants pour pouvoir étudier des systèmes à l'aide de ce puissant outil mathématique.

II. Définition de transformée de Laplace L(·)

Soit f(x) une fonction causale de R à valeurs dans ℂ ou ℝ. $D_f \in [0,+\infty$

On appelle fonction causale une fonction définie sur R dont le support est borné à gauche en 0 i.e. f est nulle pour tout x < 0.

On appelle transformée de Laplace la fonction $F(p) = L(f(x))(p)$ qui vérifie : $F(p) = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-p.x}\, dx$

III. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

On trouve ci-dessous la transformée de Laplace de quelques fonctions dites usuelles car elle est fréquemment rencontrées, sans s'attarder sur un développement mathématique relatives au calcul des intégrales.

1. Fonction échelon unité u(t)

Cette fonction est donnée par : **Question** : montrer que $\boldsymbol{U(p)} = \frac{1}{p}$

$$\begin{cases} u(t) = 1 \; si \; t \geq 0 \\ u(t) = 0 \; si \; t < 0 \end{cases}$$

➔ On a: $U(p) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}\; e^{-p.t}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-pt}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{p}\left[e^{-pt}\right]_x^0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{p}\left(1 - e^{-px}\right) = \frac{1}{p}$

d'où : $\boxed{U(p) = \frac{1}{p}}$

2. Fonction puissance

$f(t) = t^n, n \in N^*$ ➔ On a: $U(p) = \int_0^{+\infty} t^n\; e^{-p.t}\, dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$

3. Fonction exponentielle

$f(t) = e^{at}$ ➔ On a: $U(p) = \int_0^{+\infty} e^{at}\; e^{-p.t}\, dt = \frac{1}{p+a}$

IV. Quelques propriétés de la transformée de Laplace

- Superposition et linéarité : $L[\,f1(p)) + \beta\, f2(p)] = \alpha\, L[f1(p)] + \beta\, L[f2(p)]$
- Théorème de la dérivée : $L\left[\frac{d\,f(t)}{dt}\right] = p.F(p) - f(0^+)$ de même $L\left[\frac{d^2\,f(t)}{dt^2}\right] = p^2.F(p) - p.f(0^+) - f'(0^+)$

  Pour généraliser : $L\left[\frac{d^n\,f(t)}{dt^n}\right] = p^n.F(p) - p^{n-1}.f(0^+) - p^{n-2}.f^{(1)}(0^+) - p^{n-3}.f^{(3)}(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$
- Théorème de la valeur initiale : $vi = f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p.F(p)$
- Théorème de la valeur finale : $vf = f(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p.F(p)$

V. Table de la transformée de Laplace

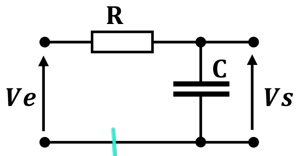
En annexe X, on fournit une table assez complète pour le besoin de la théorie des systèmes continus linéaires, elle contient les transformées de Laplace des fonctions les plus usuelles. Dans la plus part des applications des cours d'automatique, c'est souvent la transformée inverse qui utilisée.

Remarque : la transformée inverse de Laplace est hors programme de TSI, mais on l'utilise juste dans le cadre d'un système 1ere ordre, pour montrer et tracer la réponse temporelle afin de faire une comparaison avec les méthodes classiques de résolution.

VI. Applications : Fonction de transfert à partir des équations différentielles

L'un des applications de la transformée de Laplace est la résolution des équations différentielle, ainsi que la recherche de la fonction de transfert d'un système linéaire continu.

Exemple 1 : charge du condensateur – circuit RC



- L'équation différentielle régissant l'évolution de la tension de sortie vs (t) :

  $vs(t) + R.i(t) = ve(t)$ Et que $i(t) = C\frac{dvs(t)}{dt}$ ➔ d'où : $\boxed{\boldsymbol{R.C.\frac{dvs(t)}{dt} + vs(t) = ve(t)}}$

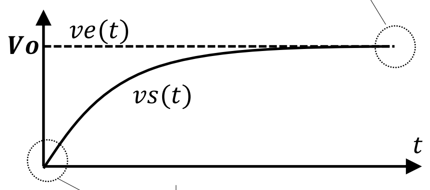
- On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle ci-dessus, on trouve :

  $\boldsymbol{RC.p\,Vs(p) + Vs(p) = Ve(p)}$ ➔ $Vs(p).(RC.p + 1) = Ve(p)$ ➔ $\boldsymbol{Vs(p) = \frac{1}{1+RC.p}.Ve(p)}$

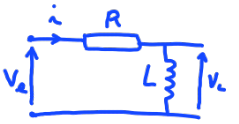
- La fonction de transfert s'exprime par $H(p) = \frac{Vs(p)}{Ve(p)}$: $\boxed{\boldsymbol{H(p) = \frac{1}{1+RC.p}}}$

A t=0, on applique un échelon de tension $ve(t) = Vo.u(t)$, leur transformée de Laplace : $Ve(p) = \frac{Vo}{p}$

- L'expression de la sortie est : $\boldsymbol{Vs(p) = \frac{Vo}{p\,(1+RC.p)}}$
- Théorème de la valeur finale : $vf = \lim_{p\to0} p.Vs(p) = \boldsymbol{\lim_{p\to0} p.\frac{Vo}{p\,(1+RC.p)} = Vo}$
- Théorème de la valeur finale : $vf = \lim_{p\to0} p.Vs(p) = \boldsymbol{\lim_{p\to+\infty} p.\frac{Vo}{p\,(1+RC.p)} = 0}$



Ex : charge RL



$\Rightarrow$ fonct de transfert $H(P) = \frac{I(P)}{V_e(P)}$

Eq. diff : $v_e(t) = R\,i(t) + L\frac{di}{dt}$

$\Rightarrow$ TL : $V_e(P) = R\,I(P) + L.p.I(P)$

$\Leftrightarrow$ $I(P)(R + L.p) = V_e(P)$

d'où : $\boxed{H(P) = \frac{1}{R+L.p}}$

× On suppose que l'entrée est un échelon :

$V_e(t) = V_0.u(t) \Rightarrow V_e(P) = \frac{V_0}{P}$

Cherchons tout d'abord $I(P)$?

On a : $H(P) = \frac{I(P)}{V_e(P)} \Rightarrow I(P) = H(P).V_e(P)$

$\Rightarrow I(P) = \frac{1}{R+LP} \times V_e(P) \Rightarrow I(P) = \frac{V_0}{P}.\frac{1}{R+L.P}$

$\Rightarrow$ valeur initiale :

$I_i = \lim_{P\to+\infty} P.I(P) = \lim_{P\to+\infty} \cancel{P}.\frac{V_0}{\cancel{P}}\,\frac{1}{R\;L.P} \Rightarrow I_i = 0$

* la valeur finale

$I_f = \lim_{P\to0} P.I(P) = \lim_{P\to0} \cancel{P}\,\frac{V_0}{\cancel{P}}\,\frac{1}{R+LP}$

$\to I_f = \frac{V_0}{R}$

* le tracé