SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS

LES NOTIONS DE BASE

I. Notions de système

Un système est un assemblage de constituants physiques branchés ou reliés les uns aux autres de façon à former une entité ou un tout. Il existe de type de système : système dynamique et système statique.

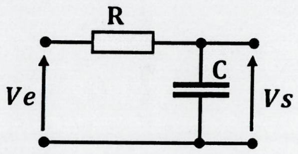
1. Système dynamique

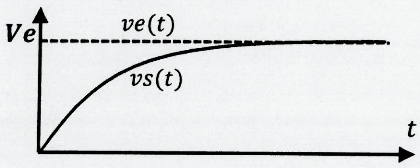
On appelle système dynamique un système dont l'étude ne peut être réalisée qu'en prenant en compte les valeurs passées du phénomène. Les grandeurs de sortie dépendent des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrée.

Exemple : charge du condensateur C.

Le condensateur C se charge à travers une résistance R lorsqu'on applique une tension continue Ve. Selon la résistance, le condensateur se chargera plus ou moins vite.

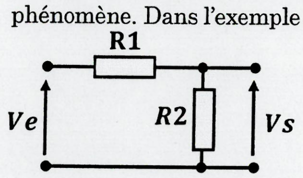
L'évolution de la tension Vs aux bornes de C évolue **dynamiquement** en fonction du **temps.**



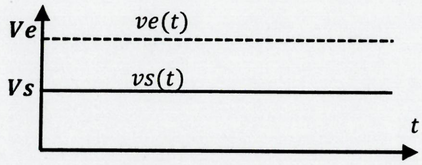


2. Système statique

Un système statique est tous système dont la sortie évolue indépendamment du temps et ne dépend pas aux valeurs passées du phénomène. Dans l'exemple ci-dessous, la tension aux bornes de la résistance R2 est liée à la tension Ve par la relation :



$$\boxed{Vs = Ve\frac{R2}{R1+R2}}$$

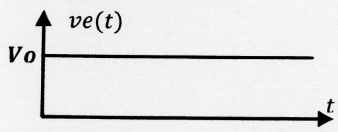


II. Notion de signaux

1. Signaux d'entrées

C'est l'excitation appliquée au système de commande à partir d'une source d'énergie extérieure, en général afin d'y provoquer une réponse spécifique. Dans le présent cours, nous nous concentrons plus particulièrement sur deux signaux essentiels :

1.1. Signal échelon



Domaine temporel

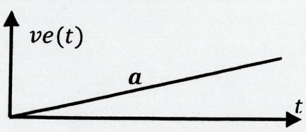
$$\begin{cases} ve(t) = Vo.u(t) \; si \; t \geq 0 \\ ve(t) = 0 \qquad si \; t < 0 \end{cases}$$

Domaine de Laplace

$Ve(P) = Vo . U(P)$

$\Rightarrow \boxed{Ve(P) = \frac{Vo}{P}}$

1.2. Signal échelon



Domaine temporel

$$\begin{cases} ve(t) = a.t.u(t) si \; t \geq 0 \\ ve(t) = 0 \; si \; t < 0 \end{cases}$$

Domaine de Laplace

$\boxed{Ve(P) = \frac{a}{P^2}}$

On les utilise pour calculer l'erreur statique et l'erreur de trainage (faite partie aussi de la précision en deuxième année).

2. Signaux de sortie

On appelle signal de sortie, la réponse effective obtenue à partir du système de commande. Elle peut coïncider ou non avec la réponse que doit normalement provoquer le signal d'entrée.

III. Système linéaire continu

Un système linéaire est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants.

On oppose aux systèmes linéaires, les systèmes non linéaires.

1. Représentation par l'équation de transfert

Soit un système décrit par une équation différentielle liant l'entrée u(t) à la sortie y(t) :

$$b_m \frac{dy^m}{dt^m} + b_{m-1} \frac{dy^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dy^1}{dt^1} + b_0\, y = a_n \frac{du^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{du^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{du^1}{dt^1} + a_0\, u$$

On rappelle que la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n d'une fonction f(t) pour des conditions initiales supposées nulles, est donnée par : $L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n.F(p)$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle, on obtient :

$$b_m P^m Y(P) + b_{m-1} P^{m-1} Y(P) + \dots + b_1 P + b_0 = a_n P^n U(P) + \dots + a P U(P) + a_0 U(P)$$

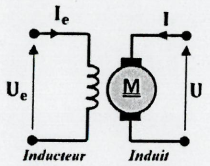
La fonction de transfert s'écrite : $H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$

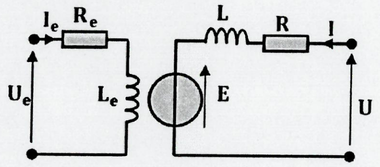
$$H(P) = \frac{a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0}{b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \dots + b_1 P + b_0}$$

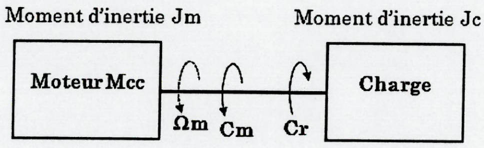
/ un système est réalisable si $\boxed{m > n}$

Exemple : modélisation de la machine à courant continu

Pour modéliser la machine à courant continu, il faut exprimer les quatre équations de la machine en régime transitoire, on donne le modèle électrique et le schéma cinématique de la MCC ;







Les équations de la machine et leur présentation dans le domaine de Laplace

Equation temporelle	Equation en domaine de Laplace
Equation électromagnétique 1 : $e(t) = Ke.\Omega(t)$	$E(p) = Ke.\Omega(p)$ (1)
Equation électromagnétique 2 : $Cm(t) = K_c\, i(t)$	$Cm(P) = Kc.I(P)$ (2)
Equation électrique : $u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e(t)$	$U(P) = RI(P) + L.P.I(P) + E(P)$ (3)
Eq. mécanique : $J\frac{d\Omega(t)}{dt} = Cm(t) - Cr(t) - f\Omega(t)$	$J.P.\Omega(P) = Cm(P) - Cr(P) - f\Omega(P)$ (4)

Trouver la fonction de transfert de la MCC M(p) si le couple résistant est nul Cr=0, tel que $M(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$

d'après (4) $\Rightarrow \Omega(P)(JP+f) = Cm(P) - \underbrace{Cr(P)}_{\simeq 0} = K_c I(P)$ (2)

et $I(P)(R+LP) = U(P) - E(P) = U(P) - Ke\,\Omega(P) \Rightarrow I(P) = \frac{U(P) - Ke\,\Omega(P)}{R+LP}$

$\Leftrightarrow \Omega(P)(JP+f) = K_c \cdot \frac{U(P) - Ke\,\Omega(P)}{R+LP}$

$\Leftrightarrow \Omega(P)\left((JP+f) + \frac{KcKe}{R+LP}\right) = \frac{Kc\,U(P)}{R+LP}$

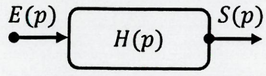
d'où $\boxed{M(P) = \frac{Kc}{JLP^2 + (RJ+Lf)P + R.f + KeKc}}$

2. Représentation par le schéma fonctionnel.

La représentation par le schéma fonctionnel, appelé aussi diagramme fonctionnel, permet de représenter de manière graphique un système physique. C'est un moyen à la fois utile et commode pour représenter les relations fonctionnelles entre les différents organes d'un système de commande.

2.1. Eléments d'un schéma fonctionnel

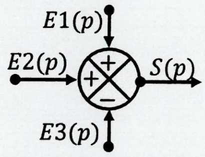
A- Bloc



Relation :

$\boxed{S(p) = H(p) \cdot E(p)}$

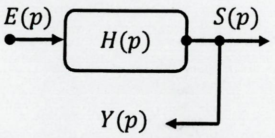
B- Sommateur



Relation :

$\boxed{S(p) = E_1(p) + E_2(p) - E_3(p)}$

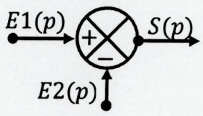
C- Jonction



Relation :

$\boxed{Y(p) = S(p) = H(p) \cdot E(p)}$

D- comparateur



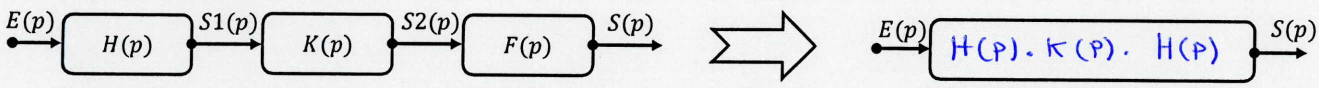
Relation :

$\boxed{S(p) = E_1(p) - E_2(p)}$

2.2. Règles relatives aux schémas fonctionnels

Il existe une multitude de transformations graphiques permettant de transformer le schéma fonctionnel global. Le but est généralement d'obtenir un schéma réduit.

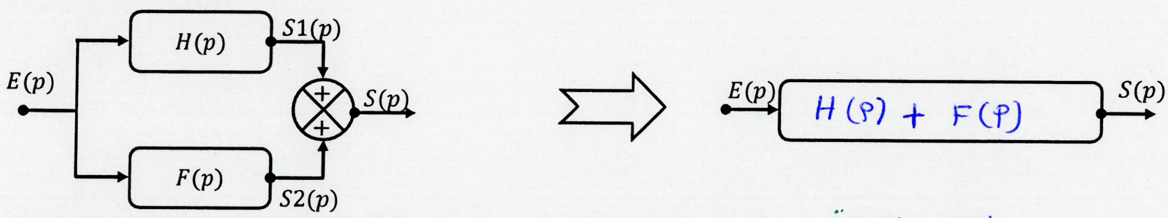
2.2.1. Blocs en série (Cascade)



Démonstration: $S(P) = F(P) \cdot S_2(P)$ / $S_2(P) = K(P) \cdot S_1(P)$ / $S_1(P) = H(P) \cdot E(P)$

d'où : $\boxed{S(P) = F(P) \cdot K(P) \cdot H(P)}$

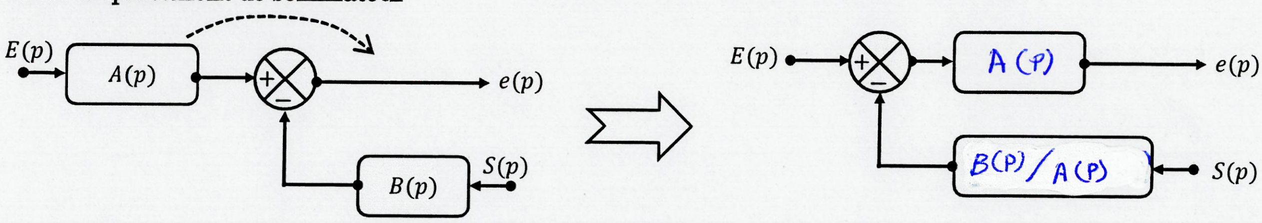
2.2.2. Blocs en parallèle



Démonstration: $S(P) = S_1(P) + S_2(P) = H(P) \cdot E(P) + F(P) \cdot E(P)$

$\Rightarrow \boxed{S(P) = (H(P) + F(P)) \cdot E(P)}$

2.2.3. Déplacement de sommateur

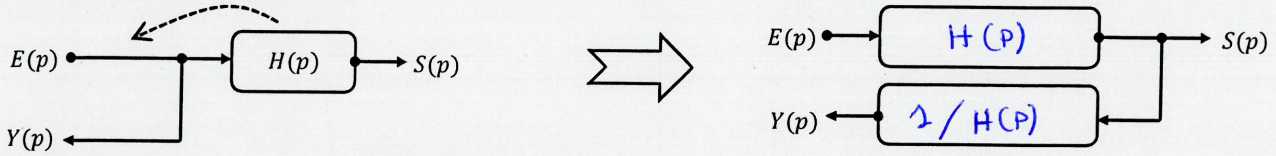


Démonstration: $e(P) = A(P) \cdot E(P) - B(P) \cdot S(P)$

$= A(P) \left[E(P) - \frac{B(P)}{A(P)} \cdot S(P) \right]$

Bloc → sommateur

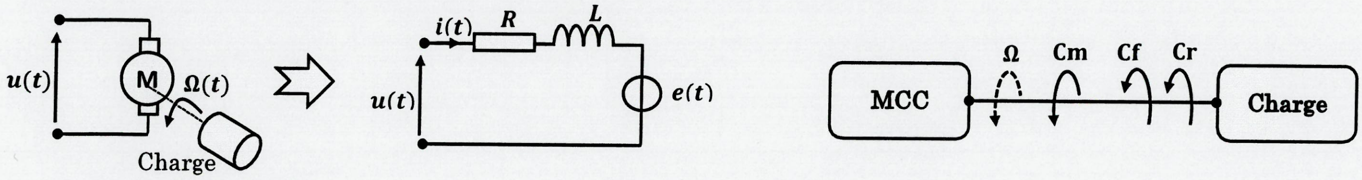
2.2.4. Déplacement de la jonction



Démonstration: Dmq: $S(P) = H(P) \cdot E(P)$ et $Y(P) = E(P) = \frac{1}{H(P)} \cdot S(P)$

Application : schéma bloc de la machine à courant continu

Le modèle électrique de la MCC en régime transitoire ainsi que leur schéma cinématique :

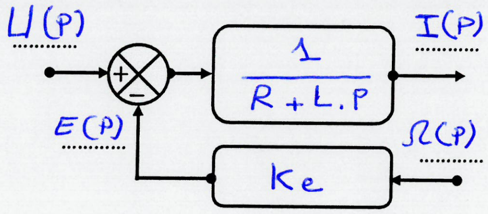


❖ **Equations électriques**

Domaine temporel	Domaine de Laplace
Equations de maille de l'induit : $L\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t) + e(t) = u(t)$	$L.P.I(P) + R.I(P) + E(P) = U(P)$
Equation électromagnétique : $e(t) = Ke.\Omega(t)$	$E(P) = Ke.\Omega(P)$

❖ **Représentation fonctionnelle**

- Expression de I(p) : $I(P) = \dfrac{U(P) - E(P)}{L.P + R}$
- Expression de E(p) : $E(P) = Ke.\Omega(P)$

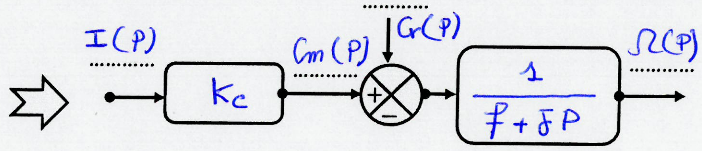


❖ **Equations mécaniques**

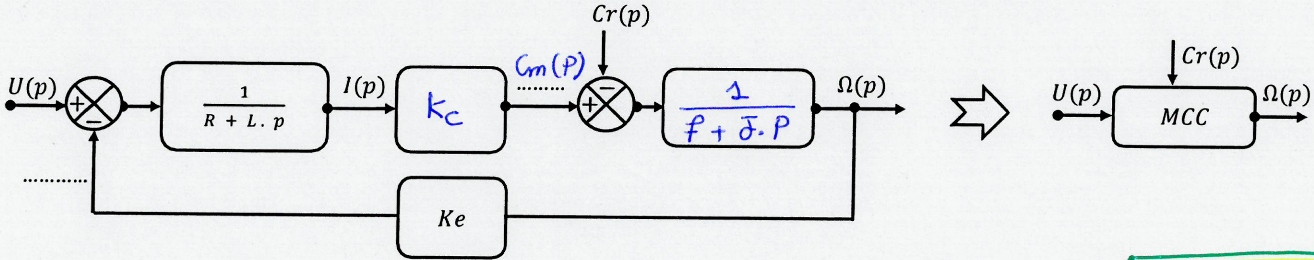
Domaine temporel	Domaine de Laplace
PFD : $J\frac{d\Omega(t)}{dt} = Cm(t) + Cr(t) + f.\Omega(t)$	$J.P.\Omega(P) = Cm(P) - Cr(P) - f\,\Omega(P)$
Equation électromagnétique : $Cm(t) = Kc.\mathrm{i}(t)$	$Cm(P) = Kc.I(P)$

❖ **Représentation fonctionnelle**

- Expression de Ω(p) : $\Omega(P) = \dfrac{Cm(P) - Cr(P)}{J P + f}$
- Expression de Cm(p) : $Cm(P) = Kc.I(P)$

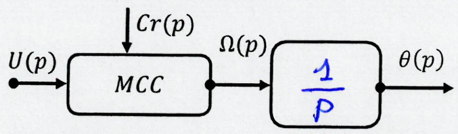


L'association de deux schémas fonctionnels, nous donnerons le schéma bloc du moteur à courant continu



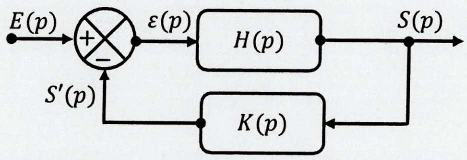
Parfois cette machine peut être contrôlée en position. Sachant que : $\Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$ → $\Omega(P) = P.\theta(P) \Rightarrow \theta(P) = \frac{1}{p}.\Omega(P)$

Ainsi, nous ajoutons un autre bloc en cascade avec le bloc MCC, comme le montre le schéma fonctionnel suivant :



3. Schéma canonique d'un système asservi.

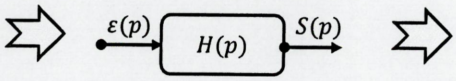
Un système de commande en boucle fermée est constitué de plusieurs organes (préactionneur, actionneur, capteur, système…), ce schéma fonctionnel peut être réduit au schéma canonique suivant :



Ce schéma permet d'introduire les principales fonctions de transfert de l'asservissement

3.1. Fonction de transfert de la chaîne directe FTCD

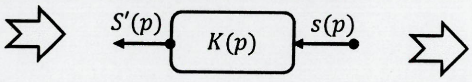
$FTCD(p) = \frac{S(p)}{\varepsilon(p)}$



$S(p) = H(p) \cdot \varepsilon(p) \Rightarrow \boxed{FTCD(p) = H(p)}$

3.2. Fonction de transfert de la chaîne de retour FTCR

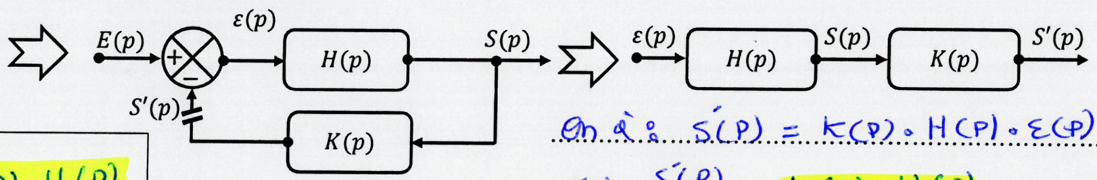
$FTCR(p) = \frac{S'(p)}{S(p)}$



$S'(p) = K(p) \cdot S(p) \Rightarrow \boxed{FTCR(p) = K(p)}$

3.3. Fonction de transfert en boucle ouverte FTBO

$FTBO(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)}$



On a : $S'(p) = K(p) \cdot H(p) \cdot \varepsilon(p)$

$\Leftrightarrow \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = K(p) \cdot H(p)$

$\boxed{FTBO(p) = K(p) \cdot H(p)}$

3.4. Fonction de transfert en boucle fermée FTBF

$FTBO(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

On a : $S(p) = H(p) \cdot \varepsilon(p)$

$= H(p) \cdot (E(p) - S'(p))$

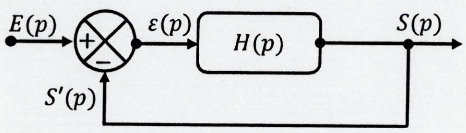
$= H(p) \cdot E(p) - H(p) \cdot K(p) \cdot S(p)$

$\Leftrightarrow S(p) + H(p) \cdot K(p) \cdot S(p) = H(p) \cdot E(p)$

$S(p)(1 + K(p) \cdot H(p)) = H(p) \cdot E(p) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1 + \underbrace{K(p) \cdot H(p)}_{FTBO}}$

$$\boxed{FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + FTBO(p)}}$$

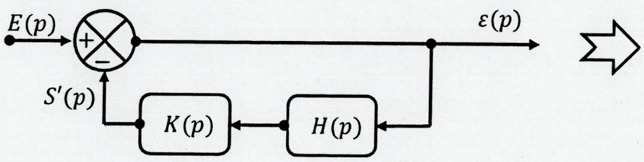
Cas particulier : schéma d'un système asservi à retour unitaire



$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{H(p)}{1 + H(p)}$$

3.5. Fonction de transfert de l'erreur

$FT\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(p)}{E(p)}$



On $\varepsilon(p) = E(p) - S'(p)$

Donc : $\boxed{FT_\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + K(p) \cdot H(p)}}$

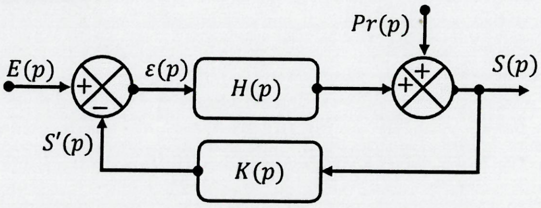
$\boxed{FTBO(p) = K(p) \cdot H(p)}$

$$\boxed{FT\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}}$$

4. Effet de la perturbation en un système asservi

On rappelle qu'une perturbation est tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la grandeur contrôlée (sortie). On considère à titre d'exemple, un moteur à courant continu MCC, C'est un système dynamique de type électromécanique. La vitesse de rotation est influencée par le couple résistant Cr, ce couple sera alors considéré comme une perturbation.

Soit le schéma canonique d'un système asservi suivant. L'objectif est d'exprimer la grandeur de sortie en fonction de la consigne E et de perturbation Pr.

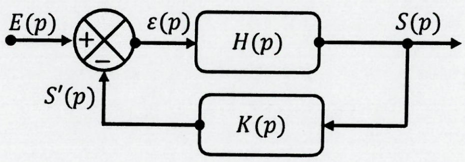


La sortie S(p) s'écrit par :

$$S(p) = F1(p).E(p) + F2(p).Pr(p)$$

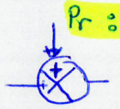
Application de théorème de superposition, on décompose le système en 2 systèmes ayant une entrée chacun :

- **Système N°1** : $Pr(p) = 0$ ➔ $F1(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$



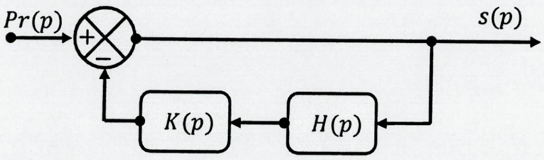
$$F1(p) = \frac{H(p)}{1 + K(p).H(p)}$$

Pr : Pr est dans le broche (+)



⇒ on ajoute signe (+)

- **Système N°2** : $E(p) = 0$ ➔ $F2(p) = \frac{S(p)}{Pr(p)}$



$$F2(p) = \frac{+1}{1 + K(p).H(p)}$$

La sortie s'écrit alors : $S(p) = F1(p).E(p) + F2(p).Pr(p)$:

$$\boxed{S(p) = \frac{H(p)}{1+K(p).H(p)}.E(p) + \frac{1}{1+K(p).H(p)}.Cr(p)}$$

....

....

A t=0 , on applique aux entrées des signaux de type échelon, tel que : $e(t) = Eo.u(t)$ et $pr(t) = Pro.u(t)$. Montrer que la valeur finale s'écrit :

$$\begin{cases} E(p) = \frac{E_o}{p} \\ P_r(p) = \frac{P_{ro}}{p} \end{cases} \Longrightarrow$$

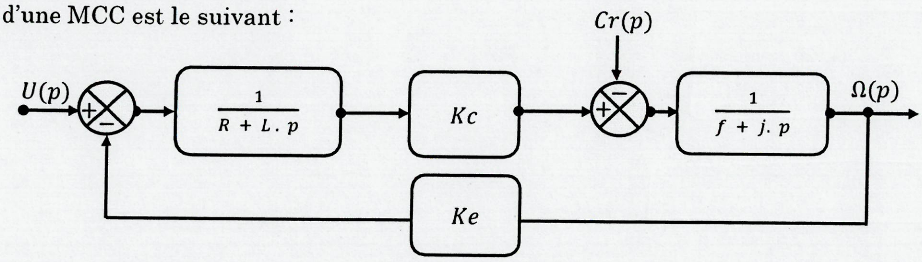
$$Sf = \frac{Eo.H(0)}{1 + K(0).H(0)} + \frac{Pr}{1 + K(0).H(0)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S_f = \lim_{p \to 0} p.S(p) \Big|_{E(p) = \frac{E_o}{p},\ P_r(p) = \frac{P_{ro}}{p}}}$$

En effet, la sortie est influencé par la perturbation Pr, car : si on augmente Pr donc la sortie augmente et de même, elle diminue dans le cas inverse.

Application : la machine à courant continu

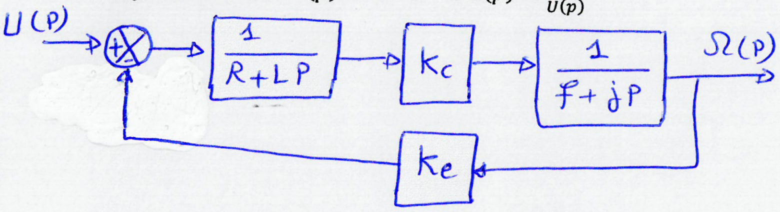
Le schéma bloc d'une MCC est le suivant :



Question : la vitesse de sortie s'écrit par : $\Omega(p) = F1(p).U(p) + F2(p).Cr(p)$. Que vaut l'expression de F1 (p) et F2 (p).

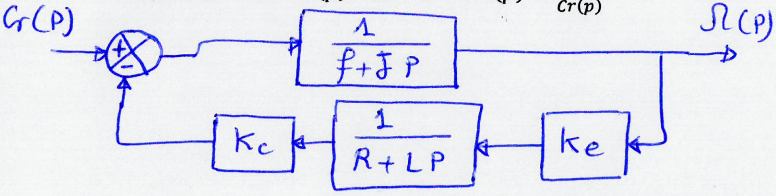
Application de théorème de superposition, on décompose du système en 2 systèmes ayant une entrée chacun :

❖ **Système N°1 :** $Cr(p) = 0$ ➔ $F1(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$



$$F1(p) = \frac{Kc}{JLP^2+(Lf+RJ)P+Rf+KeKc}$$

❖ **Système N°2 :** $U(p) = 0$ ➔ $F2(p) = \frac{\Omega(p)}{Cr(p)}$



⇐ Signe (-) car Cr est dans la broche (-)

$$F2(p) = \frac{-(R+LP)}{JLP^2+(Lf+RJ)P+Rf+KeKc}$$

La sortie s'écrit alors : $\Omega(P) = \frac{Kc \cdot U(P)}{JLP^2+(Lf+RJ)P+Rf+KeKc} - \frac{(R+LP)\,Cr(P)}{JLP^2+(Lf+RJ)P+Rf+KeKc}$

A t=0, on applique aux entrées des signaux de type échelon, tel que : $u(t) = Uo.u(t)$ et $Cr(t) = Cro.u(t)$. Exprimer la valeur finale et montrer qu'est influencée bien par le changement de couple résistant.

$$\begin{cases} U(P) = \frac{U_0}{P} \\ Cr(P) = \frac{Cro}{P} \end{cases} \Rightarrow \Omega_f = \lim_{P \to 0} P \cdot \Omega(P) = \lim_{P \to 0} \cancel{P}\left(\frac{U_0}{\cancel{P}} \frac{Kc}{D(P)} - \frac{(R+LP)}{D(P)} \cdot \frac{Cro}{\cancel{P}}\right) = \boxed{\frac{KcU_0 - RCro}{R.f + KeKc}}$$

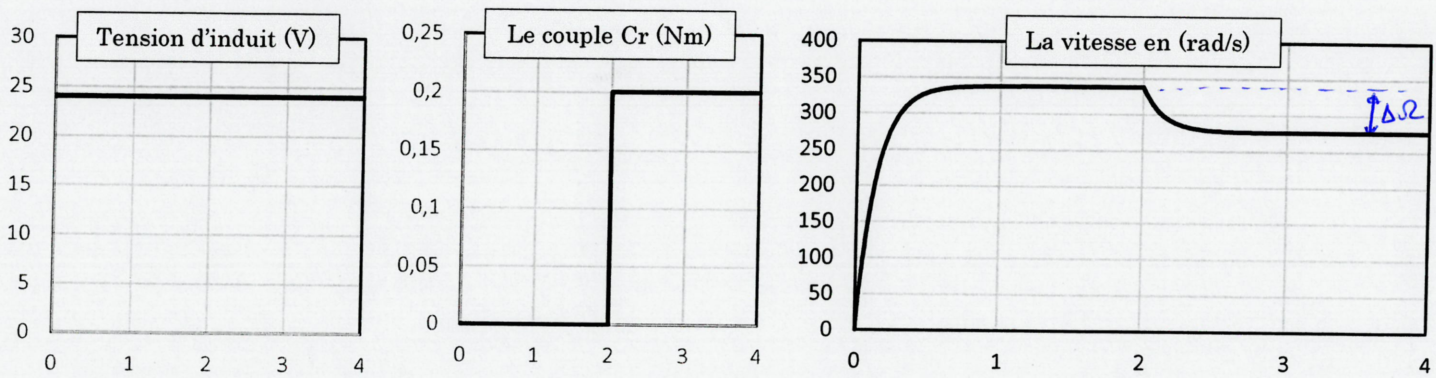
⇒ Donc si Cro ↗ ⇒ Ω(P) ↘ ⇒ le couple influe sur la vitesse

Exemple de simulation de la machine à courant continu M540 E 24 V 2500 tr/min

- Caractéristiques techniques de la machine :

Tension nominale	Couple nominal	inertie totale	La constante de couple	Résistance d'induit	Inductance d'induit
24 V	0.2 Nm	0.45 10^{-3} $Kg.m^2$	0.071 N/A	1.55 Ω	3.39 mH

- Les graphes de simulation



Remplir le tableau suivant :

La vitesse finale avant perturbation	La vitesse finale après la perturbation	La différence de vitesse ΔΩ
340 rad/s	275 rad/s	65 rad/s

Conclusion : la vitesse de sortie diminue après l'application du couple résistant
on dit que la sortie est influencée par la perturbation