ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES LINEAIRES

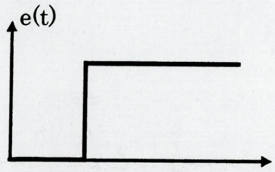
I. Introduction

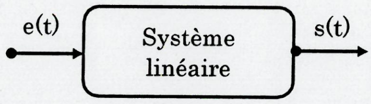
L'analyse temporelle permet de décrire le comportement transitoire des systèmes linéaires. L'objectif de cette étude est de présenter les notions fondamentales du régime transitoire et ses applications pour déterminer les performances dans ce domaine.

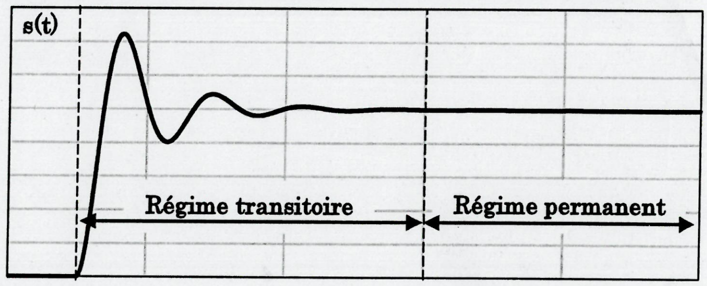
Dans ce cours, on se limite au système 1er et 2ème ordres, car ils sont plus rencontrés en pratique et nombreux sont les systèmes plus complexes qui peuvent être approchés par des systèmes d'ordre un ou deux. Leurs caractéristiques temporelles sont parfaitement maîtrisées à partir de la connaissance de leur fonction de transfert respective.

II. Analyse temporelle des systèmes linéaires

La réponse temporelle ou la réponse indicielle est obtenu expérimentalement en excitant le système par un signal spécifique de type **échelon** et observer sa réponse.







On distingue deux régimes sont :

- Un **régime transitoire** est le régime d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint un état stable appelé régime permanent. Les **grandeurs** caractérisant le comportement du système **varient**.
- Un **régime permanent** est le régime d'un système **stable** observable après un certain temps, lorsque le régime transitoire est éteint.

1. Application aux systèmes du premier ordre.

1.1. Définition d'un système du premier ordre

On appelle système du premier ordre, tout système régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$\boxed{\tau\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\, e(t)}$$

Avec : K est le gain statique $K = \frac{S(\infty)}{E}$ et τ est la constante de temps > 0 de même dimension que le temps (heure, minute, seconde)

1.2. Fonction de transfert.

La fonction de transfert du système s'obtient par l'application de la transformée de Laplace à l'équation différentielle précédente sans tenir compte des conditions initiales ; soit : $\boxed{\tau . P . S(P) + S(P) = K\, E(P)}$

D'où la fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$: $S(P)[1+\tau P] = K . E(P) \Rightarrow \boxed{H(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{K}{1+\tau P}}$

Elle admet un pôle réel : Soit $1 + \tau P = 0 \Rightarrow \boxed{P = -\frac{1}{\tau}}$

1.3. Réponse indicielle.

Afin d'évaluer les caractéristiques transitoires, on considère usuellement la réponse indicielle. C'est la réponse à un échelon $e(t) = Eo.u(t)$ dont la transformée de Laplace est : $E(P) = E_o \times U(P) \Rightarrow \boxed{E(P) = \frac{E_o}{P}}$

$H(P) = \frac{S(P)}{E(P)} \Rightarrow S(P) = H(P) . E(P)$

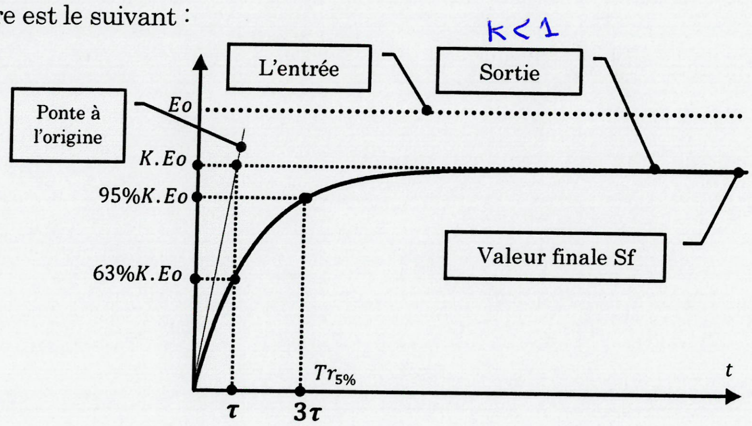
$\boxed{S(p) = \frac{E_o}{P\,(1+\tau P)}}$

D'après la table des transformées de Laplace inverse, la solution s(t) est de la forme : $s(t) = K.Eo\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

1.4. Etude de la réponse indicielle

- La valeur initiale Si : $Si = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to +\infty} p.S(p) = \lim_{p\to +\infty} p.\frac{1}{p}.\frac{K.Eo}{1+\tau p}$ ➔ $Si = 0$
- La valeur finale Sf : $Sf = \lim_{p\to 0} \cancel{p}.\frac{Eo}{\cancel{p}}.\frac{K}{1+\tau p} \Rightarrow \boxed{Sf = K.Eo}$

Le comportement transitoire d'un système 1er ordre est le suivant :



Les valeurs remarquables :

pour $t = \tau$	$s(t) = 63\%\ K.Eo$
pour $t = 3\tau$	$s(t) = 95\%\ K.Eo$

1.5. Temps de réponse

Le temps de réponse d'un système est le temps mis par la sortie du système pour entrer dans la bande compris entre 95% et 105% de sa valeur finale.

Pour un système 1er Ordre : $s(tr) = 0.95\ K.Eo \Leftrightarrow K.Eo\left(1 - e^{-\frac{tr}{\tau}}\right) = 0.95\ K.Eo \Leftrightarrow -\frac{tr}{\tau} = \ln(0.05) = -3$

D'où : $\boxed{Tr_{5\%} = 3\,\tau}$

Conclusion :

L'analyse temporelle ci-dessus a permis de caractériser complètement la réponse indicielle d'un système d'ordre un :

- forme de la réponse transitoire : exponentielle sans oscillation (jamais la valeur finale est dépassée).
- Démarrage à zéro avec une ponte vertical
- estimation de la durée du régime transitoire à 5% : $Tr_{5\%} = 3\,\tau$
- valeur finale : K.E0

2. Application aux systèmes du premier ordre.

2.1. Définition d'un système du premier ordre

On appelle système du deuxième ordre, tout système régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_n}\frac{d\,s(t)}{dt} + s(t) = K\,e(t)}$$

Avec :

- K : le gain statique $K = \frac{S(\infty)}{E}$
- ω_n : la pulsation propre du système (rad/s)
- m : facteur ou coefficient d'amortissement, parfois noté z ou ξ (sans dimension).

2.2. Fonction de transfert.

La fonction de transfert du système s'obtient par l'application de la transformée de Laplace à l'équation différentielle précédente sans tenir compte des conditions initiales ; soit :

$\frac{1}{\omega_n^2} p^2 S(p) + \frac{2m}{\omega_n} p\, S(p) + S(p) = K.E(p)$

$S(p)\left(\frac{p^2}{\omega_n^2}+\frac{2m}{\omega_n}p+1\right)=K\,E(p)$

D'où la fonction de transfert $H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}$: $\boxed{H(p)=\frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}p^2+\frac{2m}{\omega_n}p+1}=\frac{K\omega_n^2}{p^2+2m\omega_n p+\omega_n^2}}$

Les pôles p1et p2 de la fonction de transfert de transfert sont les racines de l'équation : $p^2+2m\omega_n.p+\omega_n^2=0$

2.3. Réponse indicielle

Afin d'évaluer les caractéristiques transitoires, on considère usuellement la réponse indicielle. C'est la réponse à un échelon $e(t)=Eo.u(t)$ dont la transformée de Laplace est : $E(p)=\frac{Eo}{p}$

S(p) = $H(p).E(p)=\frac{Eo}{p}\frac{K\omega_n^2}{p^2+2m\omega_n p+\omega_n^2}$

- La valeur initiale Si : $Si=\lim_{p\to\infty}p.\frac{Eo}{p}.\frac{K\omega_n^2}{p^2+2m\omega_n p+\omega_n^2}\Rightarrow\boxed{Si=0}$
- La valeur finale Sf : $Sf=\lim_{p\to 0}p.\frac{Eo}{p}.\frac{K\omega_n^2}{p^2+2m\omega_n p+\omega_n^2}\Rightarrow\boxed{Sf=K.Eo}$

2.4. Etude de la réponse transitoire

Le comportement transitoire de la réponse indicielle n'est plus facile à tracer , mais cette fois-ci, il dépond plus du coefficient d'amortissement m.

Il faut faire alors une étude du polynôme de dénominateur Den (p) : Den $(j\omega)=1+\frac{2m}{\omega_n}p+\left(\frac{1}{\omega_n}\right)^2p^2$

- On pose X = p ➔ $D(X)=1+2m\frac{X}{\omega_n}+\left(\frac{X}{\omega_n}\right)^2$ et notant X1 et X2, les solutions de polynôme de D(X) .
- Calculons de de discriminant : $\Delta=\frac{4}{\omega_0^2}(m^2-1)$

Il y a donc trois cas d'étude en fonction de m : $\boldsymbol{m>1}$, $\boldsymbol{m=1}$ et $\boldsymbol{m<1}$.

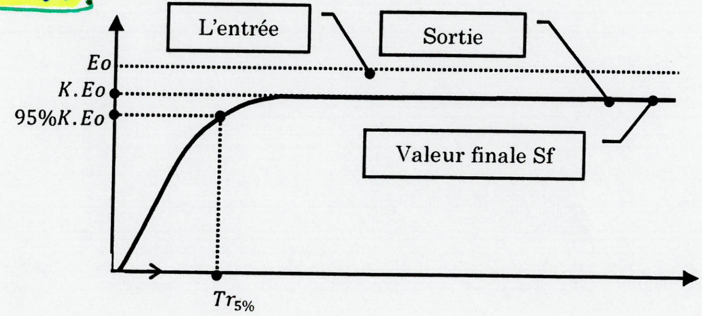
2.4.1. Régime apériodique : $m>1$

Il y a deux racines réelles : $\boldsymbol{\omega_1=m\omega_0-\omega_0\sqrt{m^2-1}}$ et $\boldsymbol{\omega_2=m\omega_0+\omega_0\sqrt{m^2-1}}$. La fonction de transfert est alors s'écrit : $H(p)=\frac{K}{(1+\tau1\,p)(1+\tau2\,p)}=K.\mathbf{H1(p).H2(p)}$ avec $\tau1=\frac{1}{\omega_1}$ et $\tau2=\frac{1}{\omega_2}$

Les fonctions H1 et H2 sont deux fonctions de 1er ordre de pulsation de coupure $\boldsymbol{\omega_1}$ et $\boldsymbol{\omega_2}$. La réponse indicielle est la suivante :

$\boxed{S(p)=K.H_1(p).H_2(p).E(p)=\frac{K\,Eo}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}}$

- forme de la réponse transitoire : exponentielle sans oscillation (jamais la valeur finale est dépassée).
- Démarrage à zéro avec une ponte horizontale
- valeur finale : K.E0



2.4.2. Régime critique : m =1

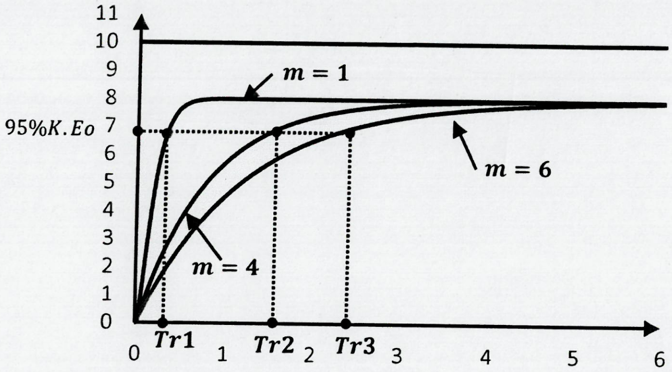
Il y a deux racines réelles doubles : $\boldsymbol{\omega_c=m\omega_n}$. La fonction de transfert est alors s'écrit : $\boldsymbol{H(p)}=\frac{A}{(1+\tau p)^2}$ avec $\tau=\frac{1}{\omega_c}$

La réponse indicielle est donc :

S(p) = $H(p).E(p)=\frac{A\,Eo}{p(1+\tau p)^2}$

Un exemple pour : K=0.8, $\omega_n = 2\,rad/s$ et on prend m=1, m=4 et m=6.

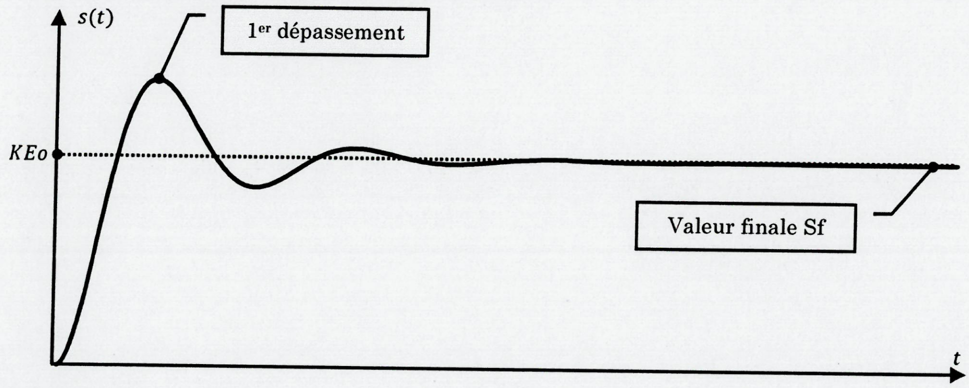
On en déduit que le temps de réponse minimum sans dépassement est obtenu pour m=1.



2.4.3. Régime pseudopériodique : $m < 1$

Dans ce cas, les racines sont toutes imaginaires : $\omega_1 = m\omega_n - j.\omega_n\sqrt{1-m^2}$ et $\omega_2 = m\omega_n + j.\omega_n\sqrt{1-m^2}$. La réponse indicielle devient : $S(p) = \frac{Eo}{p}\frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}p^2 + \frac{2m}{\omega_n}p + 1}$

Le comportement transitoire de la réponse devient :



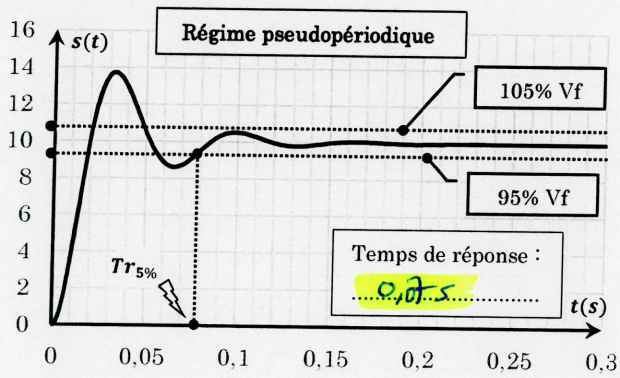
Remarque :

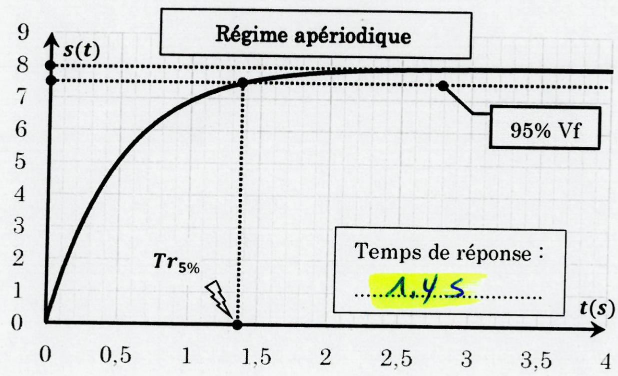
Pour ce cas (m<1) le système présente un dépassement, il est caractérisée par la présence des oscillations d'amplitudes décroissantes.

Dans certaines applications industrielles, le dépassement doit être nul ou très faible. La raison est généralement liée à la sécurité du personnel et du matériel.

2.5. Temps de réponse

On rappelle que le temps de réponse d'un système est le temps mis par la sortie du système pour entrer dans la bande compris entre 95% et 105% de sa valeur finale :



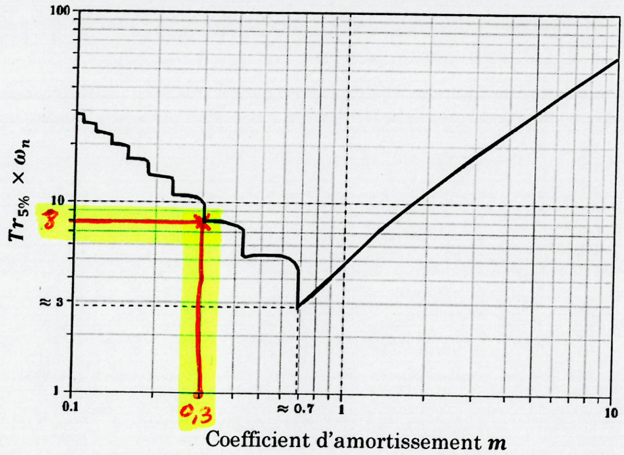


Vf : la valeur finale de la sortie

Question : Existe-t-il une méthode mathématique servant à calculer directement le temps de réponse ?

Il n'existe pas en toute rigueur pour les systèmes d'ordre deux une expression exacte permettant de calculer le temps de réponse en fonction des paramètres fondamentaux m et ω_n.

Le calcul de temps de réponse est obtenu à partir de l'abaque suivant, le faite de connaitre la pulsation propre et le coefficient d'amortissement conduit à calculer le temps de réponse à 5%.



Remarque : On note que le temps de réponse est minimum lorsque m= 0.7. Dans ces conditions :

$$Tr_{5\%} \times \omega_n = 3$$

Exemple : si m=0.3 et ω_n=9.34 rad/s. le temps de réponse est :

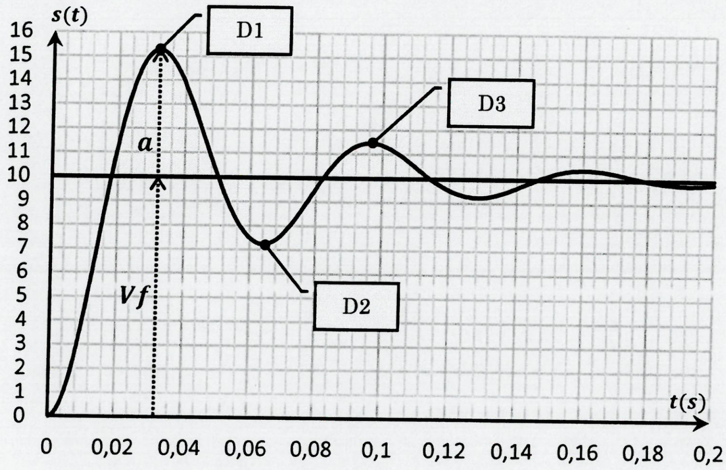
On a : $m = 0,3 \Rightarrow Tr \cdot \omega_n = 8$

d'où : $\boxed{Tr = \frac{8}{\omega_n}} \Rightarrow \boxed{Tr = 0,85\,s}$

2.6. Dépassement indiciel

Lorsque m est inférieur à 1, la réponse indicielle génère des dépassements. On définit le premier dépassement par :

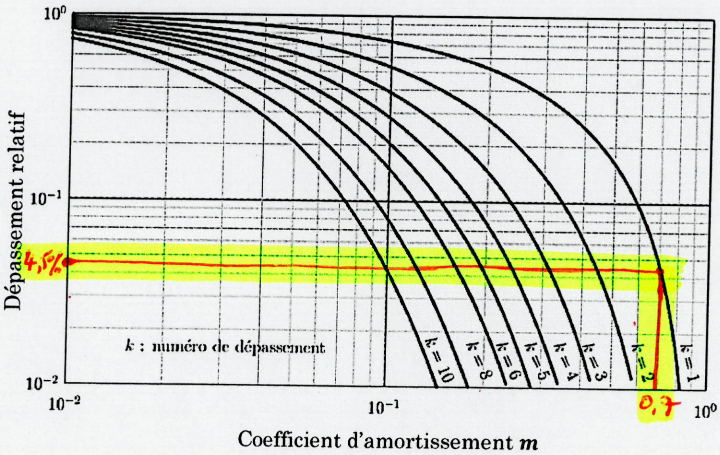
$$D1\% = 100 \cdot \frac{a}{Vf}$$



Une autre relation mathématique est obtenue à partir de la réponse indicielle vaut :

$$D1\% = 100\, e^{\frac{-\pi . m}{\sqrt{1-m^2}}}$$

L'abaque ci-dessous permet de connaître la valeur du Dk dépassement relatif en fonction du facteur d'amortissement. Lorsque l'amortissement tend vers 1, on peut ainsi mettre en évidence que la valeur des dépassements est de plus en plus faible.



Exemple : si m=0.7 et ω_n=9.34 rad/s. le 1[er] dépassement D1 est :

Pour $m = 0,7 \Rightarrow \boxed{D = 4,5\,\%}$

III. Pôles dominants et réduction du modèle

Dans cette partie de cours. Nous intéresserons à la réduction des modèles, dans le cas où le système est d'ordre supérieur à 2, Leurs caractéristiques transitoires ne peuvent être calculées algébriquement sans que l'on passe par des approximations. Lorsque celles-ci sont justifiées, on obtient généralement une évaluation raisonnable de ces caractéristiques.

Pour appréhender un système complexe en prenant comme support un système de fonction de transfert d'ordre trois de pôles réels : $\tau 1 = 5$, $\tau 2 = 0.5$, $\tau 3 = 0.1$ et $K = 1$

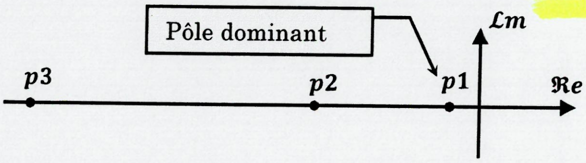
$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau 1\, p)(1 + \tau 2\, p)(1 + \tau 3\, p)}$$

Les pôles sont tous réels donc le régime transitoire ne présente pas en conséquence aucune oscillation

1. Pôles dominants

Les pôles dits dominants sont situés près de l'axe imaginaire dans la carte des pôles. Ils correspondent à des constantes de temps élevées ou à des amortissements faibles.

Pour la fonction précédente possède trois pôles sont : $p1 = -\frac{1}{\tau 1} = -\frac{1}{5}$, $p_2 = -\frac{1}{\tau_2} = -\frac{1}{0,5}$ et $p_3 = -\frac{1}{\tau_3} = -\frac{1}{0,1}$

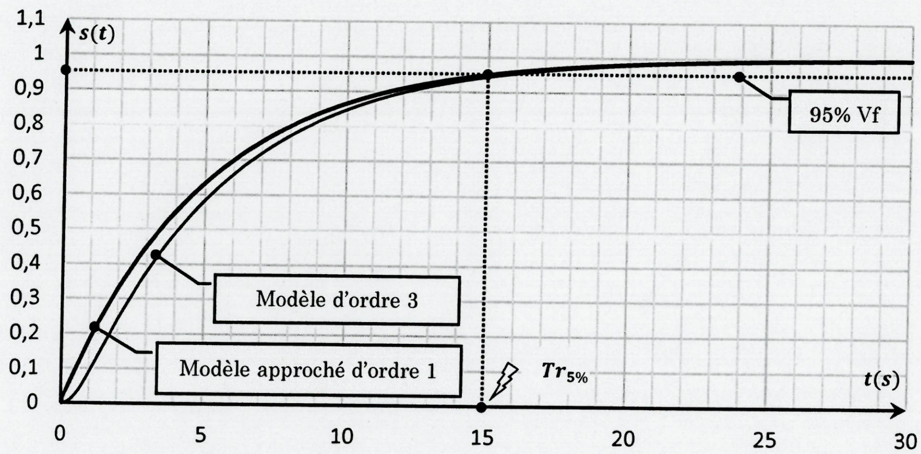


2. Réduction de modèle

Le comportement transitoire est celui imposé par la constante dominante $\tau 1 = 5$ et donc du pôle dominant p1, le moins éloigné de l'axe des imaginaires. Le temps de réponse est pratiquement égal à $3\tau 1 = 15$.

$$H(p) = \frac{K}{(1+\tau 1\, p)(1+\tau 2\, p)(1+\tau 3\, p)} \quad \Rightarrow \quad H(p) = \frac{K}{1+\tau 1\, p}$$

La figure suivante représentant les réponses à un échelon unité confirme cette approximation :



<u>**Exemple** : Modèle simplifier de la machine à courant continu</u>

L'étude a pour but de simplifier le modèle de la MCC, d'un système de second ordre à un modèle de premier ordre. Pour ce faire, nous rechercherons un modèle tout d'abord le mieux connu de la MCC contenant deux constantes de temps, une **électrique** τ_e et l'autre **électromécanique** τ_{em} : $M(p) = \frac{Km}{(1+\tau_e\, p)(1+\tau_{em}\, p)}$

- **La constante de tempe électrique** τ_e

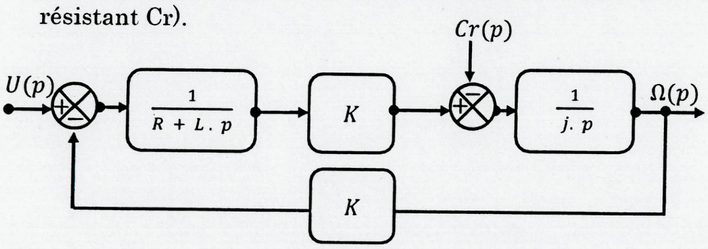
On obtient cette constante à partir de l'équation de maille aux bornes de l'induit : $u(t) = e(t) + R\, i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$

La transformation de Laplace de cette équation, conduit à : $I(p) = \frac{1}{R}.\frac{U(p)-E(p)}{1+\frac{L}{R}P}$ ➔ $I(p) = \frac{1}{R}.\frac{U(p)-E(p)}{1+\tau_e P}$ avec $\tau_e = \frac{L}{R}$

- **La constante de tempe électromécanique** τ_{em}

On trouve de la figure suivante, le schéma fonctionnel de la MCC :

Pour faciliter l'étude, nous considérons que le coefficient de frottement visqueux f est nul (il est intégré dans le couple résistant Cr).



Fonction de transfert M(p) = Ω(p) / U(p) pour Cr=0

$Cr=0 \Rightarrow M(p) = \dfrac{\frac{K}{Jp(R+Lp)}}{1+\frac{K^2}{Jp(R+Lp)}}$

$M(p) = \dfrac{K}{Jp(R+Lp) + K^2} \Rightarrow \boxed{M(p) = \dfrac{K}{JLp^2 + RJp + K^2}}$

En effet : $M(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{RJ}{K^2}p + \frac{LJ}{K^2}p}$

Donc le modèle de la MCC est un modèle de 2ème ordre, on peut le mettre sous la forme canonique suivant :

$M(p) = \frac{Km}{(1+\tau_e p)(1+\tau_{em} p)} = \frac{Km}{1 + (\tau_e + \tau_{em})p + \tau_e.\tau_{em} p^2}$

Question : par identification. Montrer que la constante de temps électromécanique, s'écrit par : $\tau_{em} = \frac{J.R}{K^2}$

On $\tau_e \tau_{em} = \dfrac{LJ}{K^2} \Rightarrow \tau_{em} = \dfrac{LJ}{K^2} \cdot \dfrac{1}{\tau_e} = \dfrac{\cancel{L}J}{K^2} \dfrac{R}{\cancel{L}} \Rightarrow \boxed{\tau_{em} = \dfrac{JR}{K^2}}$

Pratiquement la constante de temps électromécanique est très grande par rapport à la constante électrique : $\tau_{em} \gg \tau_e$

- **Simplification de modèle MCC :**

  En prenant comme support la machine à courant continu : **M540 E 24 V 2500 tr/min**

❖ **Caractéristiques techniques de la machine :**

Tension nominale	inertie totale	La constante K	Résistance d'induit	Inductance d'induit
24 V	$0.45\ 10^{-3}\ Kg.m^2$	0.071 SI	1.55 Ω	3.39 mH

❖ **Calcul des constantes de temps**

Valeur de la constante électrique τ_e	Valeur de la constante électromécanique τ_{em}	La constante dominante ($\tau_e$ou τ_{em})
2.18 ms	138,36 ms	$\tau_{em} = 138,36$ ms

❖ **Le modèle approché de la machine à courant continu**

on a : $\tau_{em} \gg \tau_e \Rightarrow H(p) \simeq \dfrac{Km}{1+\tau_{em} p} \Rightarrow \boxed{H(p) = \dfrac{1/K}{1 + \frac{LJ}{K^2}p}}$

Notes :