

Filtres analogiques passifs

I. Introduction

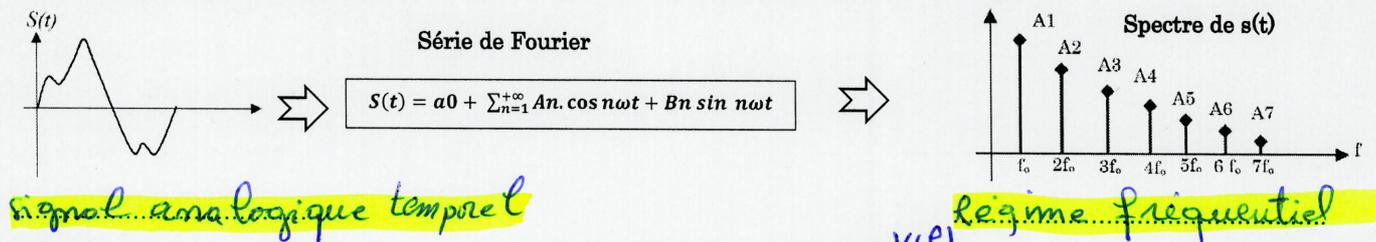
Les filtres électriques, inventés par Zobel dès 1923 ont permis l'extension considérable des télécommunications. Jusqu'à ces dernières années, ils étaient presque uniquement réalisés à l'aide de composants passifs doués de propriétés résonnantes : inductances, capacités, quartz...etc.

Les filtres se présentent sous différentes formes. Lorsqu'il n'y a pas d'amplification de la puissance du signal d'entrée par un élément actif (transistor, ALI), il est passif ; dans le cas contraire il est actif.

II. Définition

La fonction filtrage de fréquence sert à assurer la suppression des signaux de fréquences non désirée et conserver ou même amplifier, les signaux de fréquence désirée.

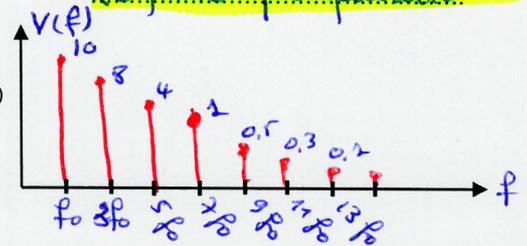
Pour un signal périodique quelconque considéré comme somme d'une série de Fourier :



Exemple :

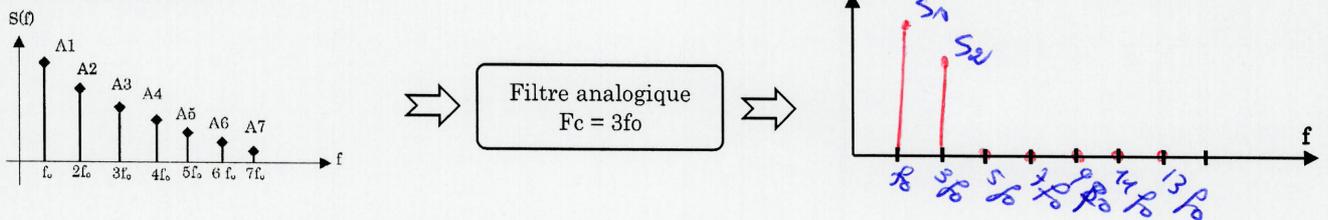
Soit $v(t) = 10 \sin(\omega_0 t) + 8 \sin(3\omega_0 t) + 4 \sin(5\omega_0 t) + 1 \sin(7\omega_0 t) + 0.5 \sin(9\omega_0 t) + 0.3 \sin(11\omega_0 t) + 0.1 \sin(13\omega_0 t)$

$\omega = 2\pi f_0$



Tracer le spectre de signal V(f).

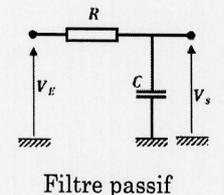
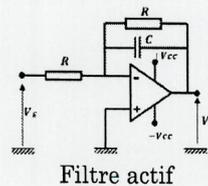
Pour comprendre bien l'effet du filtre, on suppose que le filtre à installer à une fréquence de coupure est $f_c = 3f_0$. Le spectre de sortie du filtre devient :



Donc ce filtre permet de rejeter les raies de fréquence supérieur à $3f_0$ et de laisse passer les fréquences inférieur ou égale à $3f_0$. On distingue différents types de filtrage :

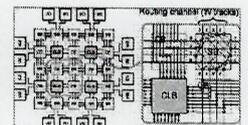
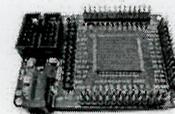
» Filtrage analogique avec composants linéaires :

- o Filtres passifs utilisant des composants discrets R, L et C ;
- o Filtres actifs utilisant des composants discrets R, L, C et ALI.



» Filtrage numérique avec composant programmable

Par DSP (Digital Signal Processor : processeur de signal numérique) ; ou les circuits logiques programmables FPGA

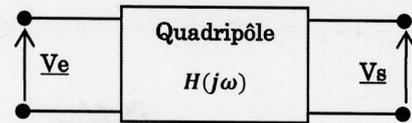


En Génie électrique GE : nous allons aborder les **filtres passifs** et les **filtres numériques** également après avoir faire le chapitre des convertisseurs CAN/CNA. Les filtres actifs sont déjà traités en physique.

III. Notions de base

Un filtre sera vu comme un quadripôle qui admet :

- o Une tension d'entrée V_e
- o Une tension de sortie V_s
- o La transmittance ou fonction de transfert $H(j\omega)$



La transmittance ou fonction de transfert $H(j\omega)$ d'un filtre est défini par : $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$

»» Remarque :

Dans l'étude des filtres, on s'intéresse à tracer le diagramme de Bode : le « plan de Bode » est une façon de décrire le module et l'argument (la phase) de la fonction de transfert $H(j\omega)$ en fonction de ω . L'étude complète de ce cours nécessite la maîtrise de deux cours mathématiques sont : les **nombre complexes** et les **fonctions logarithmiques de la base 10**

❖ **Rappel : Nombres complexes**

Soit $Z = a + j b$, un nombre complexe avec $Z \in \mathbb{C}$ et supposons que les nombres a et b sont positifs

- o Module de Z : $r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- o Argument de Z : $\theta = \arg(Z) = \arctg(\frac{b}{a})$

Différentes formes pour écrire un nombre complexe Z :

- o $Z = r (\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta))$
- o $Z = [r, \theta]$

Propriétés :

$[r_1, \theta_1] \cdot [r_2, \theta_2]$	$[r_1, \theta_1] / [r_2, \theta_2]$	$\theta = \arctg(\frac{b}{a})$ avec $a > 0$	$Arctg(\pm 1)$	$Arctg(\pm \infty)$
$[r_1 \cdot r_2, \theta_1 + \theta_2]$	$[\frac{r_1}{r_2}, \theta_1 - \theta_2]$	Si $b > 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ et si $b < 0 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm \frac{\pi}{2}$

❖ **Rappel : les Fonction Logarithme de base 10**

La fonction logarithme de base 10 est la fonction définie par : $\forall x \in]0; +\infty[$ tel que $\log_{10} x = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

Propriété : $\forall x \in]0; +\infty[$ et $\forall y \in]0; +\infty[$

<ul style="list-style-type: none"> o $\log_{10} x \cdot y = \log_{10} x + \log_{10} y$ o $\log_{10} x^b = b \log_{10} x$ o $\log_{10} x/y = \log_{10} x - \log_{10} y$ 	<ul style="list-style-type: none"> o $\log_{10} 1 = 0$ o $\log_{10} 10 = 1, \log_{10} 10^b = b,$ o $\log_{10} x = b \Leftrightarrow x = 10^b$
--	---

IV. Classification des filtres analogiques

L'objectif du filtrage est de sélectionner une fréquence ou une bande de fréquence appelée la Bande Passante BP exprimée en Hz. Les limites de la bande passante sont définies par une fréquence de coupure F_c qui peut être la limite basse ou haute de la bande passante.

On distingue quatre types de filtre idéal définis selon leur gabarit :

Passé bas	Passé haut	Passé bande	Coupe bande
BP = $[0, f_p]$	BP = $[\frac{1}{f_s}, +\infty[$	BP = $[F_{p1}, F_{p2}]$	BP = $[0, F_{s1}] \cup [F_{s2}, +\infty[$

Ap : atténuation maximale dans la bande passante As : atténuation maximale dans la bande coupée

V. Etude des filtres passifs de premier ordre

Les filtres du premier ordre se limite également aux filtrages passe bas et passe haut, par contre les filtres passe bande et coupe bande sont étudié à partir de l'ordre 2 ou plus (n'existe pas une structure de ses filtres en 1ere ordre).

» Objectif : Dans cette partie, nous allons faire une analyse des structures des filtres (circuits), de trouver la fonction complexe de transfert $H(j\omega)$ et de tracer le diagramme de Bode (Gain et phase). On va finir par l'application d'un signal périodique $V_e(t)$ à l'entrée du filtre et de faire certains calculs pour récupérer le signal de sortie $v_s(t)$.

» Les formes canoniques des filtres 1ere ordre :

Filtre passe bas	Filtre passe haut
$H(j\omega) = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$	$H(j\omega) = A \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$
A : le gain statique sans unité ω_0 : la pulsation de coupure en rad/s ($\omega_0 = 2\pi f_0$ avec f_0 est la fréquence de coupure en Hz)	

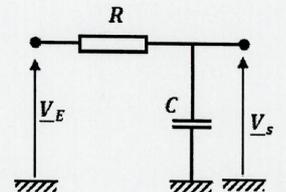
1. Filtre passe bas

1.1. Schéma et fonction de transfert

Un filtre passe bas premier ordre est présenté par le schéma ci-après :

Question : exprimer la fonction de transfert et la mettre sous la forme canonique : $H(j\omega) = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$

- Expression V_s en fonction de V_e , R et C : $V_s = V_e \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}$
- La fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$



Identification des paramètres A et ω_0 :

Gain statique A : 1, la pulsation de coupure $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, la fréquence de coupure $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$

1.2. Diagramme de Bode

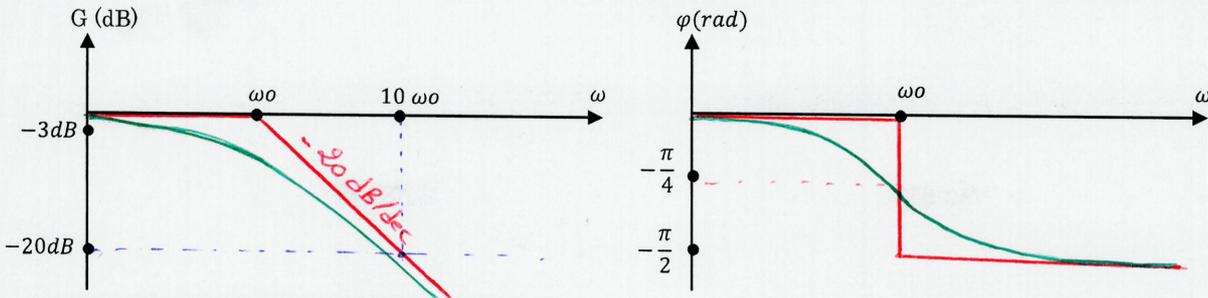
Le diagramme de Bode est le diagramme du gain et de la phase en fonction de la pulsation du signal d'entre. Tout d'abord, il faut exprimer le gain et la phase de la fonction de transfert précédente en fonction de la pulsation :

Le module de $ H(j\omega) $	Le gain G	La phase $\varphi = \arg(H(j\omega))$
$ H = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$	$G = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \right)$	$\varphi = -\arctg(RC\omega)$

Pour le tracer, on calcule le gain pour les différentes pulsations comme le montre dans le tableau suivant :

Pulsation	Le module $ H $	Le gain G en dB	La phase φ (rad)
$\omega = 0$	$ H = 1$	$G = 20 \log_{10} H \Rightarrow G_0 = 0$	$\varphi = 0$
$\omega = \omega_0$	$ H = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G = G_0 - 3 \text{ dB}$	$\varphi = -\pi/4$
$\omega = 10\omega_0$	$ H = \frac{1}{10}$	$G = G_0 - 20 \text{ dB}$	$\varphi = -1.47$
$\omega \gg \omega_0$	$ H \approx \frac{1}{\omega/\omega_0}$	$G = G_0 - X$ avec $X = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$	$\varphi \rightarrow -\pi/2$
$\omega = +\infty$	$ H \approx 0^+$	$G \rightarrow -\infty$	$\varphi = -\pi/2$

Cette méthode reste efficace en termes de sécurité, mais elle prend beaucoup de temps de résolution pour un ingénieur. La meilleure méthode est la méthode de modèle (déjà vu en automatique) qui se basait sur la connaissance de cinq (5) formes canoniques qui sont présentées en annexe.



1.3. Exploitation du filtre passe bas 1^{ère} ordre

On désire filtrer un signal périodique $V_e(t) = 10 + 10 \sin(\omega_0 t) + 8 \sin(10\omega_0 t)$, l'objectif est de calculer le signal de sortie $V_s(t)$.

Sachant que : $|H(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$ et $\varphi = \arg(H(j\omega)) = -\arctg(\frac{\omega}{\omega_0})$

En utilisant la méthode de superposition, calculer l'expression de $V_s(t)$.

Terme d'entrée	Pulsation	H	H × V _{emax}	φ	Terme de sortie V _s
10	$\omega = 0$	1	10	0	10
$10 \sin(\omega_0 t)$	$\omega = \omega_0$	$1/\sqrt{2}$	7.07	$\varphi = -\pi/4$	7.07
$8 \sin(10\omega_0 t)$	$\omega = 10\omega_0$	$1/10$	1	$\varphi = -1.107$	1
Expression finale $V_s(t)$: $V_s(t) = 10 + 7.07 \sin(\omega_0 t - \pi/4) + \sin(\dots)$					

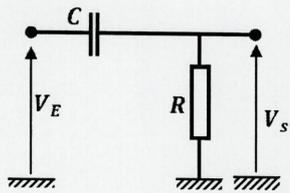
2. Filtre passe haut

2.1. Schéma et fonction de transfert

Un filtre passe haut premier ordre est présenté par le schéma ci-après :

Question : exprimer la fonction de transfert et la mettre sous la forme canonique : $H(j\omega) = A \cdot \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}$

- Expression V_s en fonction de V_e , R et C : $V_s = V_e \cdot \frac{R}{1 + jRC\omega}$
- La fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{A j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}$



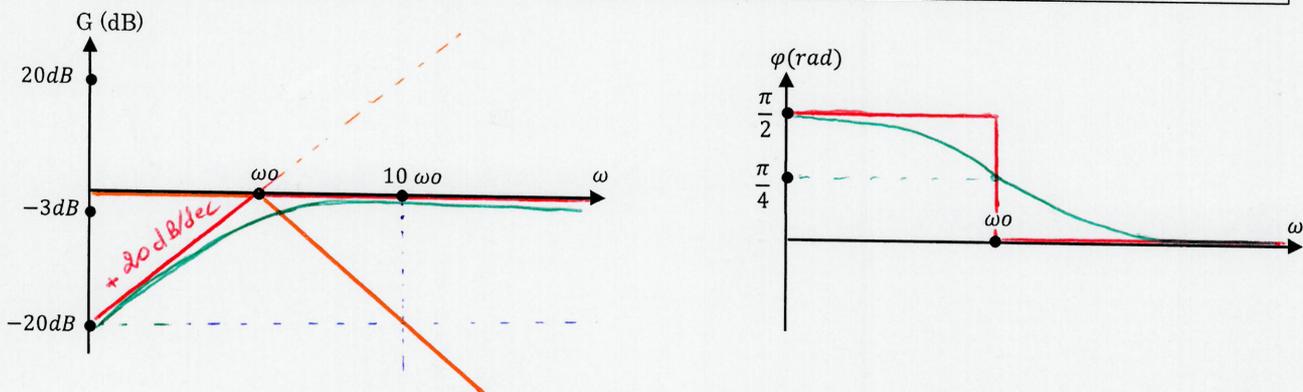
Identification des paramètres A et ω_0 :

Gain statique A : 1 , la pulsation de coupure $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, la fréquence de coupure $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$

2.2. Diagramme de Bode

Expression du gain et de la phase de la fonction de transfert précédente en fonction de la pulsation ω :

Le module de $ H(j\omega) $	Le gain G	La phase $\varphi = \arg(H(j\omega))$
$ H = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$	$20 \log \left[\frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \right]$	$\varphi = \frac{\pi}{2} - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$



2.3. Exploitation du filtre passe bas 1ère ordre

On désire filtrer un signal périodique $V_e(t) = 10 + 10 \sin(\omega_0 t) + 8 \sin(10\omega_0 t)$, l'objectif est de calculer le signal de sortie $V_s(t)$.

Sachant que : $|H(j\omega)| = A \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$ et $\varphi = \arg(H(j\omega)) = -\arctg(\frac{\omega}{\omega_0})$

En utilisant la méthode de superposition, calculer l'expression de $V_s(t)$.

Terme d'entrée	Pulsation	H	H × V _{max}	φ en (rad)	Terme de sortie V _s
10	$\omega = 0$	0	0	$\pi/2$	0V
10 sin($\omega_0 t$)	$\omega = \omega_0$	$1/\sqrt{2}$	7.07	$\pi/4$	7.07V
8 sin(10 $\omega_0 t$)	$\omega = 10\omega_0$	1	8	0.16	8

Expression finale $V_s(t)$: $V_s(t) = 7.07 \sin(\omega_0 t + \pi/4) + 8 \sin(10\omega_0 t + 0.16)$

VI. Etude des filtres passifs de deuxième ordre

Les filtres de deuxièmes ordres incluent tous les classifications à savoir les filtres passe bande et coupe bande, mais l'étude maintenant un peu différente au 1^{ère} ordre à cause des paramètres mis en jeu et font changer le comportement fréquentiel de ses filtres.

Dans cette partie, on va traiter que le cas du filtre passe bas dans les mêmes ordres d'objectifs cités précédemment et les autres classes vont être traités également aux travaux dirigés.

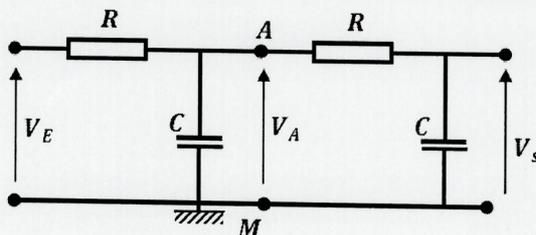
❖ Les formes canoniques des filtres 2^{èmes} ordre

Passe bas	Passe haut
$H(j\omega) = A \frac{1}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$	$H(j\omega) = A \frac{(j \frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$
Passe bande	Coupe bande
$H(j\omega) = A \frac{2mj \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$	$H(j\omega) = A \frac{1 + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$

- **A** : le gain statique (sans unité)
- **m** : le coefficient d'amortissement noté parfois z (sans unité)
- **ω₀** : la pulsation propre du système (en rad/s)

1. La fonction de transfert

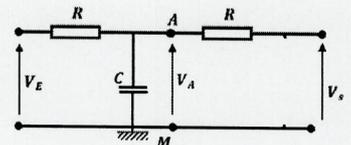
Le schéma du filtre passe bas 2^{ème} ordre en cascade est présenté dans la figure suivante :



Pour tirer la fonction de transfert de ce type de structure, il faut appliquer deux théorèmes : théorème de MILMAN et théorème de diviseur de tension.

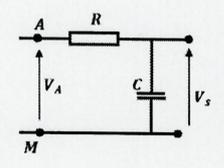
Partie 1 : application du théorème de MILMAN à l'entrée

o L'expression de La tension V_A : $V_A = \frac{V_E}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + j\omega C}$ ①



Partie 2 : application du théorème de diviseur de tension à la sortie

o L'expression de La tension V_s : $V_s = V_A \frac{1}{1 + jRC\omega}$
 Alors l'expression de V_A est : $V_A = V_s (2 + jRC\omega)$ ②



A partir des deux expressions 1 et 2, la fonction de transfert est la suivante :

① = ② $V_s (1 + jRC\omega) = \frac{V_E + V_s}{2 + jRC\omega}$

$H(j\omega) = \frac{1}{2 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2} = \frac{A}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$

Ce filtre est un filtre passe bas 2^{ème} ordre et par identification avec la forme canonique adéquate, donc :

$A = 2$ $\frac{2m}{\omega_0} = 3RC$ $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

Le gain statique	Le coefficient d'amortissement m	La pulsation propre ω_0
$A = 2$	$m = \frac{3}{2} = 1,5 > 1$	$\omega_0 = \frac{1}{RC}$

2. Diagrammes de Bode d'un filtre passe bas de deuxième ordre

Le traçage de diagramme de Bode n'est plus basé directement sur la méthode de modèle, mais cette fois-ci, il dépend plus du coefficient d'amortissement m.

Il faut faire alors une étude du polynôme de dénominateur Den (j ω) : Den (j ω) = $1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2$

- o On pose X = j ω \rightarrow D(X) = $1 + 2m \frac{X}{\omega_0} + (\frac{X}{\omega_0})^2$ et notant X1 et X2, les solutions de polynôme de D(X) .
- o Calculons de de discriminant : $\Delta = \frac{4}{\omega_0^2} (m^2 - 1)$

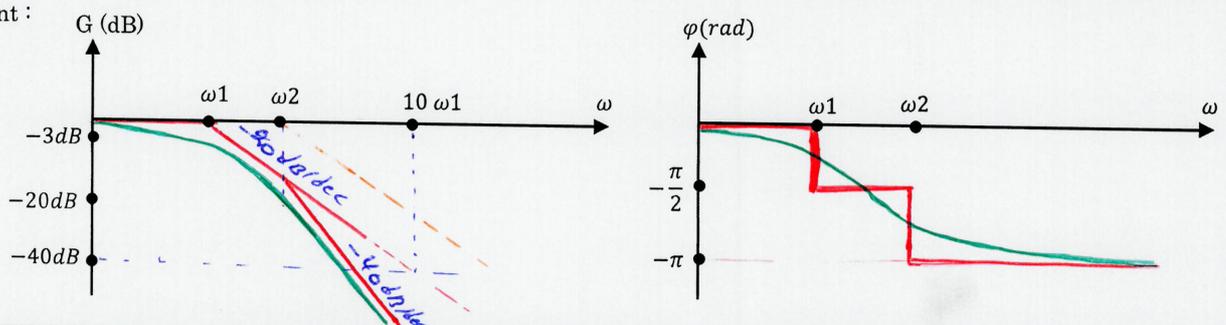
Il y a donc trois cas d'étude en fonction de m : $m > 1$, $m = 1$ et $m < 1$.

2.1. Régime apériodique : m > 1

Il y a deux racines réelles : $\omega_1 = m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$ et $\omega_2 = m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$. La fonction de transfert est alors s'écrit :

$H(j\omega) = \frac{A}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})} = A \cdot H1(j\omega) \cdot H2(j\omega)$

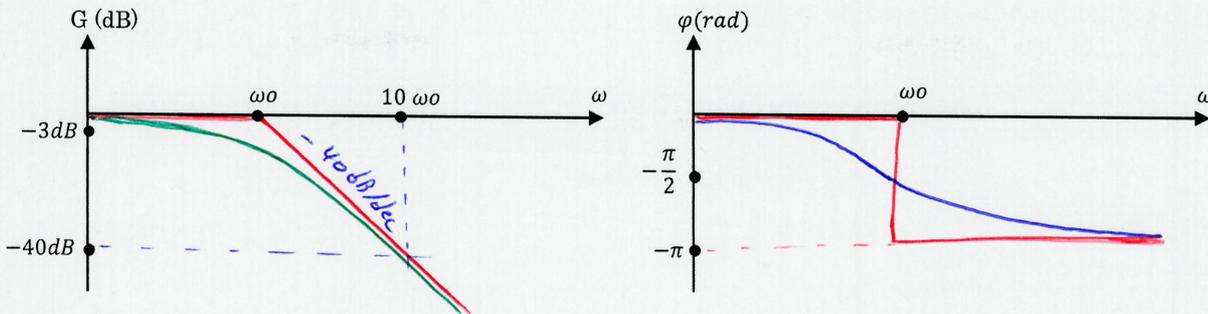
Les fonctions H1 et H2 sont deux fonctions de 1^{er} ordre de pulsation de coupure ω_1 et ω_2 . Le digramme de Bode est le suivant :



2.2. Régime critique : m = 1

Il y a deux racines réelles doubles : $\omega_c = m\omega_0$. La fonction de transfert est alors s'écrit : $H(j\omega) = \frac{A}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$

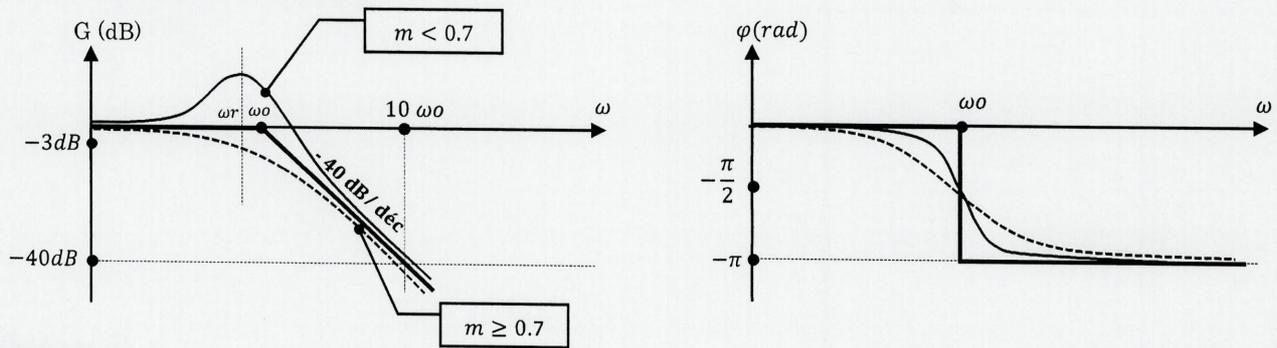
Le digramme de Bode est le suivant :



2.3. Régime pseudopériodique : m < 1

Dans ce cas, les racines sont toutes imaginaires : $\omega_1 = m\omega_0 - j.\omega_0\sqrt{1 - m^2}$ et $\omega_2 = m\omega_0 + j.\omega_0\sqrt{1 - m^2}$.

Le digramme de Bode est le suivant :



Remarque :

- o La réponse en gain du filtre présente une résonance à la pulsation de résonance ω_R à $m < 0.7$. Cette pulsation s'exprime par : $\omega_R = \omega_0\sqrt{1 - 2m^2}$.
- o Le gain maximal (situé à la pulsation de résonance ω_R) s'exprime par : $G_R = 20 \log H_{max}$ avec $H_{max} = \frac{A}{2m\sqrt{1 - m^2}}$.

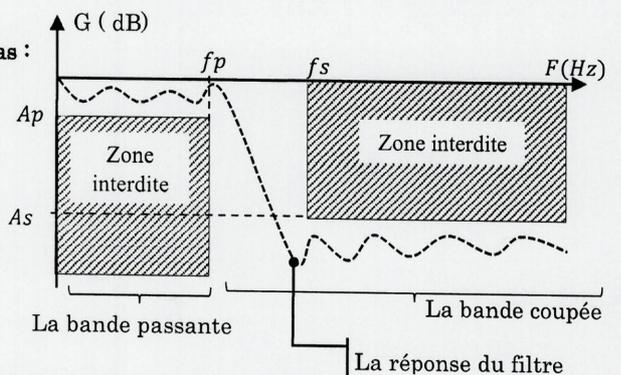
Pour plus d'information pour ce régime, donc voir l'annexe X.

VII. Gabarit d'un filtre

En ingénierie électrique IE, un gabarit est un moyen de communication entre un ingénieur et le concepteur de filtre, il est fourni comme étant un cahier des charges comportant plus d'informations à respecter. Il permet de définir des zones interdites et des zones dans lesquelles devront impérativement se situer les graphes représentant l'atténuation du filtre en fréquence.

En présentant dans la figure suivante, le gabarit d'un filtre passe bas :

- o f_p : la fréquence de coupure
- o f_s : la fréquence à la bande coupée
- o A_p : atténuation maximale dans la bande passante
- o A_s : atténuation maximale dans la bande coupée



Les informations extraites :

- La fréquence de coupure dans la bande passante : $f_c = f_p$
- L'ordre du filtre peut être calculé (lorsque $f_s = 10.f_p$!) par la relation suivante : $n \geq \frac{|GS|}{20}$

Remarque : la réponse du filtre à réaliser doit être située dans la zone non hachurée.