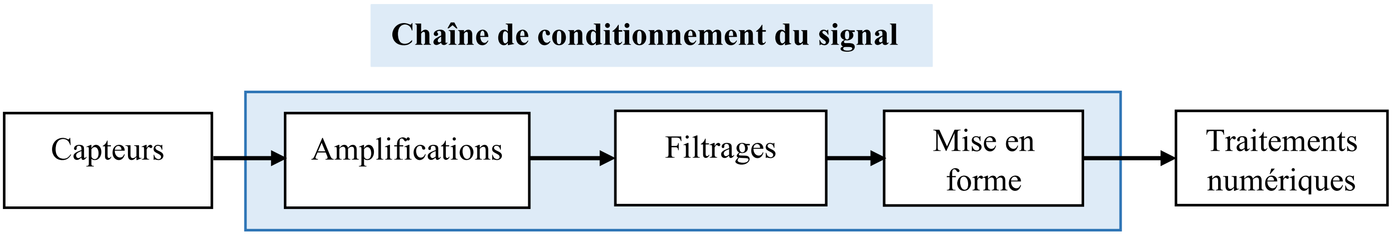
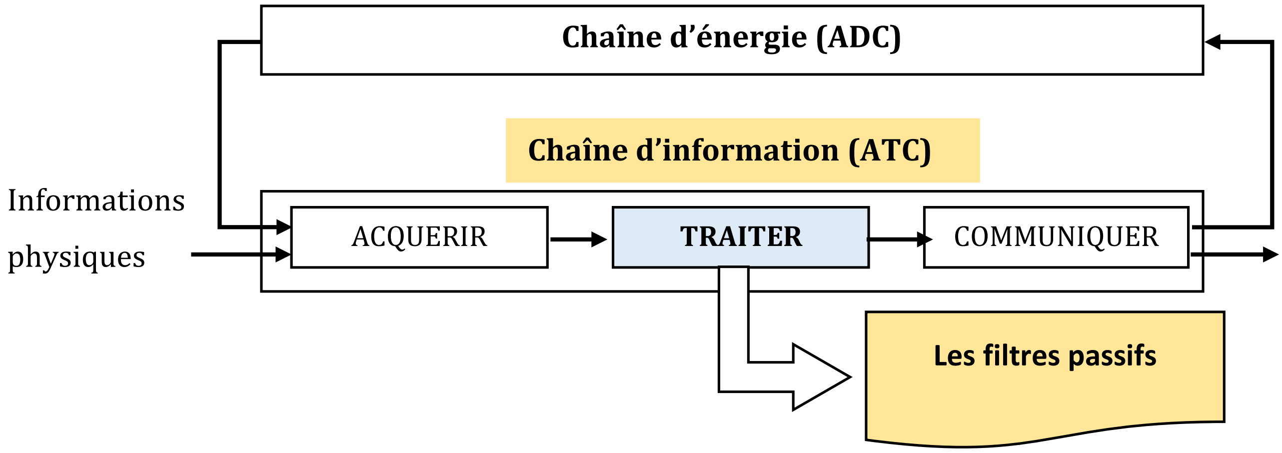
Les filtres électriques, inventés par Zobel dés 1923 ont permis l'extension considérable des télécommunications. Jusqu'à ces dernières années, ils étaient presque uniquement réalisés à l'aide de composants passifs doués de propriétés résonnantes : inductances, capacités, quartz…etc.

Les filtres se présentent sous différentes formes. Lorsqu'il n'y a pas d'amplification de la puissance du signal d'entrée par un élément actif (transistor, ALI), il est passif ; dans le cas contraire il est actif.

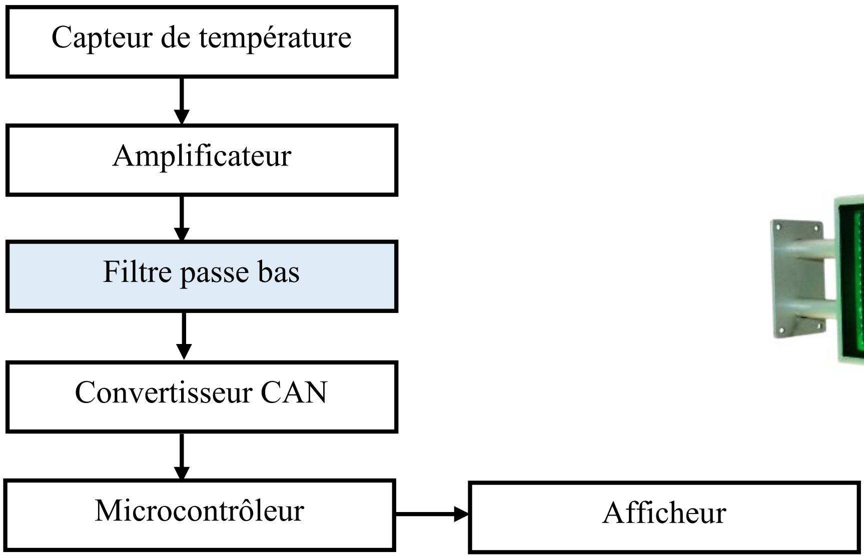
Les filtres réalisent la **fonction filtrer** dans **la chaîne de conditionnement du signal**.

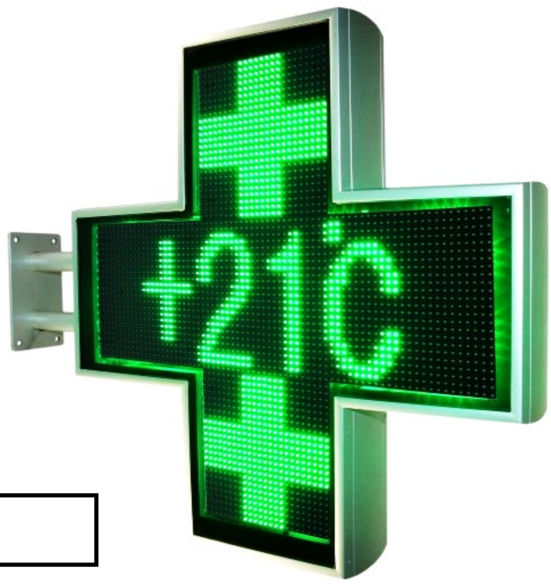


Dans l'architecture fonctionnelle générique d'un système **pluritechnologique,** les filtres assurent la fonction « **TRAITER** » de la chaîne d'**Information**.



Exemple : panneau LED pharmacie



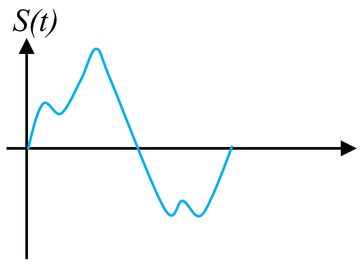


I. Définition

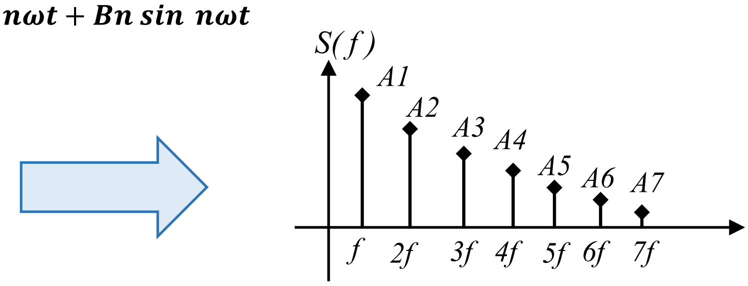
La fonction filtrage de fréquence sert à assurer la suppression des signaux de fréquences non désirée et conserver ou même amplifier, les signaux de fréquence désirée.

Pour un signal périodique quelconque considéré comme somme d'une série de Fourier :

$$\boldsymbol{S(t) = a0 + \sum_{n=1}^{+\infty} An.\cos n\omega t + Bn \sin n\omega t}$$

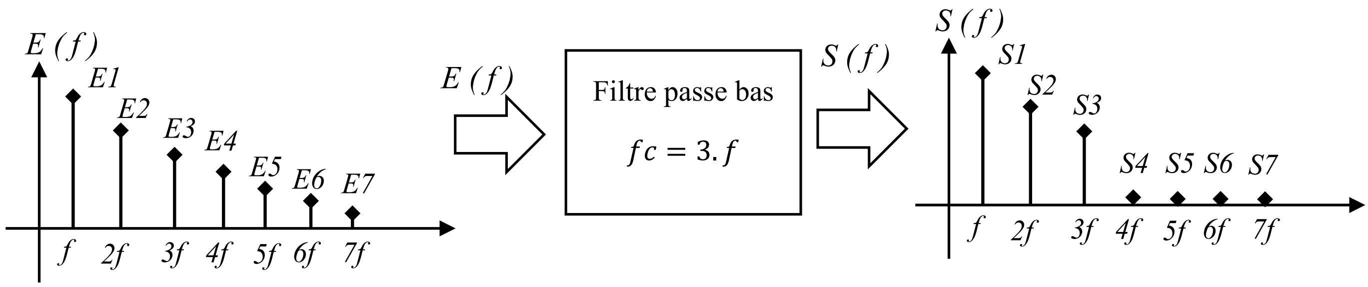


Représentation temporelle



Représentation fréquentielle

Pour un filtre passe bas de fréquence de coupure $fc = 3f$. Le spectre du signal de sortie est le suivant :

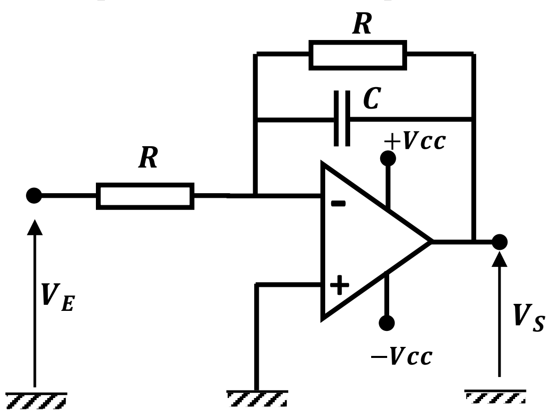


Donc ce filtre permet de **rejeter** les raies de fréquence supérieur à $3f$ et de **lisse passer** les fréquences inférieur ou égale à $3f$.

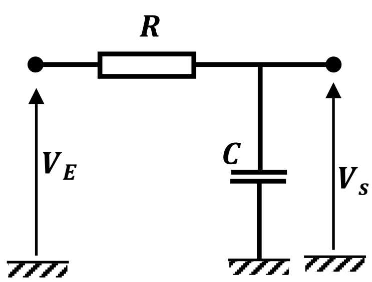
II. Types des filtres

Il y a deux types de filtres sont :

- Filtre actif : c'est un filtre qui nécessite une alimentation pour fonctionner.
- Filtre passif : c'est un filtre qui fonctionne sans aucune alimentation.



Filtre actif : passe bas



Filtre passif : passe bas

Dans ce cours on se limite à étudier les comportements fréquentiels des différents **filtres passifs**.

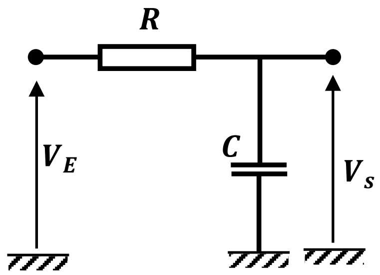
III. Structure des filtres passifs

Il existe un grand nombre de montages pour la réalisation des filtres passifs. Nous allons citer dans cette rubrique quelques structures typiques que l'on rencontre très fréquemment.

1. Filtres classiques du premier ordre

- ***<u>Filtre passe bas</u>***

  Le schéma d'un filtre passe bas passif est le suivant :



Objectif :

- Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{\underline{Vs}}{\underline{Ve}}$
- Exprimer la fréquence de coupure
- Exprimer le module et la phase du filtre
- Tracer le diagramme de Bode

- *La fonction de transfert $H(j\omega)$:*

Appliquons la formule de diviseur de tension aux bornes du condensateur C :

$$\underline{Vs} = \frac{\frac{1}{jc\omega}}{R+\frac{1}{j\,c\,\omega}}\underline{Ve} = \frac{1}{1+jRC\,\omega}\underline{Ve} \quad \text{donc} \quad \boldsymbol{H(j\omega)} = \frac{\underline{\boldsymbol{Vs}}}{\underline{\boldsymbol{Ve}}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1+jRC\,\omega}}$$

- *La fréquence de coupure f_0 :*

La fonction canonique d'un filtre passe bas 1re ordre se met sous la forme: $\boldsymbol{H(j\omega)} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{1+j\frac{\omega}{\omega_o}}}$

Par identification de la fonction de transfert avec la forme canonique alors :

$$\boldsymbol{K=1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega_o} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R\,C}}$$

- *Le module et la phase*

  - <u>Le module de $H(j\omega)$</u>

$$|H(j\omega)| = \left|\frac{K}{1+j\frac{\omega}{\omega_o}}\right| \;➔\; \text{alors :} \quad |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}} \;➔\; |\boldsymbol{H(j\omega)}| = \frac{\boldsymbol{K}}{\sqrt{\boldsymbol{1+(R\,C\,\omega)^2}}}$$

  - <u>La phase de $H(j\omega)$</u>

$$\varphi(H(j\omega)) = \arg H(j\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_o} \;➔\; \text{Alors :}\; \boldsymbol{\varphi(H(j\omega)) = -\arctan RC\omega}$$

- ***<u>Diagramme de Bode :</u>***

le « plan de Bode » est une façon de décrire **le module** et **l'argument** (la phase) d'un complexe $\boldsymbol{\underline{A}(\omega)}$ en fonction de $\boldsymbol{\omega}$.

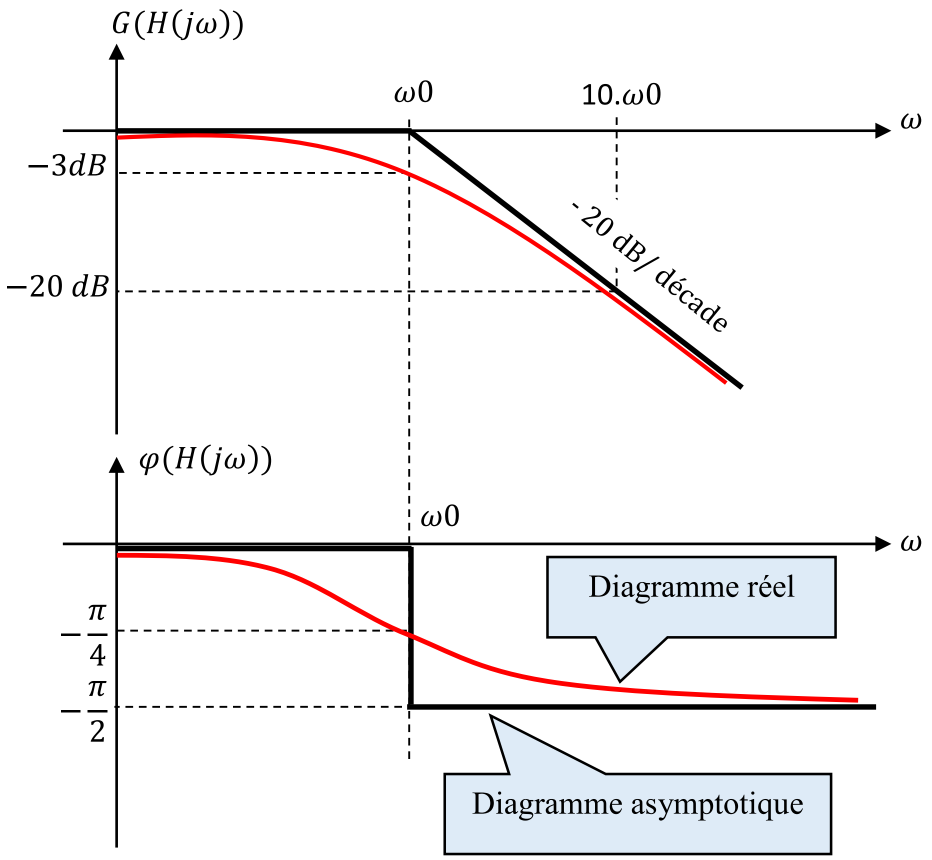
Le module du complexe est décrit la variable $\boldsymbol{20\log_{10}(|\underline{A}(\omega)|)}$ (appelé $|\underline{A}|$ en **décibel** ou $\boldsymbol{A_{dB}}$) en fonction de ω en **échelle $\boldsymbol{\log_{10}}$.**

L'argument est représenté lui aussi en fonction de ω en échelle $\log_{10}$.

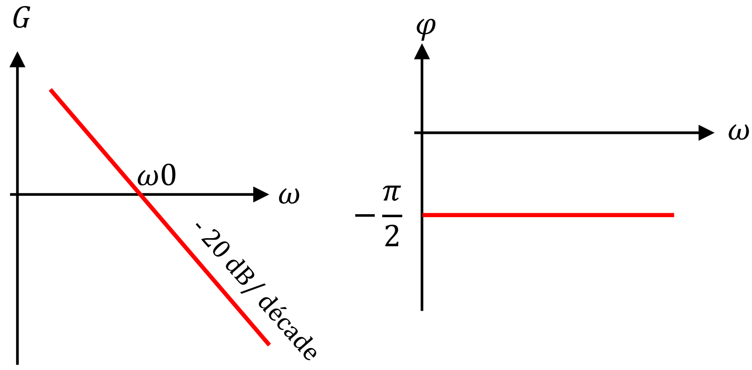
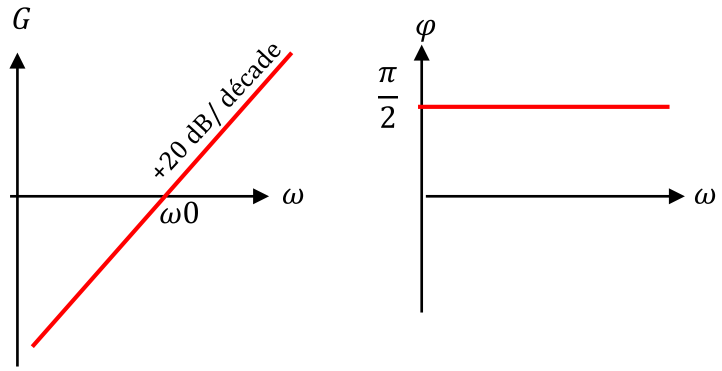
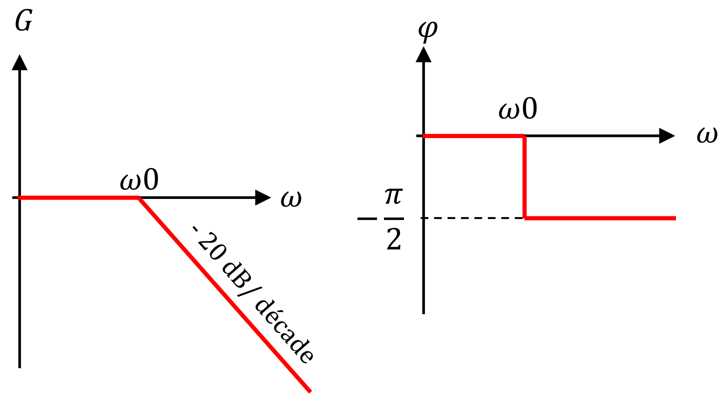
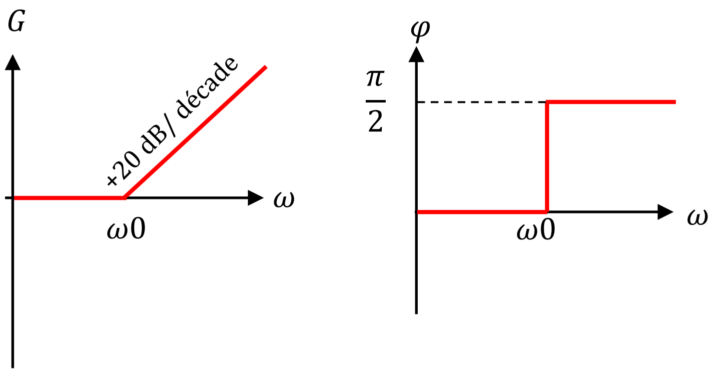
Le diagramme de Bode de $H(j\omega)$

On a : $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}$ et $\varphi(H(j\omega)) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_o}$ donc le module complexe dans le plan logarithmique : $G = \mathbf{20\log_{10}}\left(\frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}\right)$

- Pour $\omega = 0$:
  - ✓ $|H(j\omega)| = K$ ➔ $G = 20\log_{10}(k) = \mathbf{0\ dB}$
  - ✓ $\varphi(H(j\omega)) = \mathbf{0}$
- Pour $\omega = \omega_o$:
  - ✓ $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$ ➔ $G = 20\,log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\mathbf{3\ dB}$
  - ✓ $\varphi(H(j\omega)) = -\arctan 1 = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$
- Pour $\omega = +\infty$:
  - ✓ $|H(j\omega)| = 0$ ➔ $G = -20\,log_{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}\right) = -\infty$
  - ✓ $\varphi(H(j\omega)) = -\arctan +\infty = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$
- Pour $\omega \ll \omega_o$:
  - ✓ $|H(j\omega)| \approx K$ ➔ $G = 0\ \boldsymbol{dB}$
  - ✓ $\varphi(H(j\omega)) \approx -\arctan 0 = \mathbf{0}$
- Pour $\omega \gg \omega_o$:
  - ✓ $|H(j\omega)| \approx \frac{K}{\frac{\omega}{\omega_o}}$ ➔ $G = 20\,log_{10}(k) - 20\,log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) = -20\,log_{10}(x)$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_o}$
  - ✓ $\varphi(H(j\omega)) \rightarrow -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$

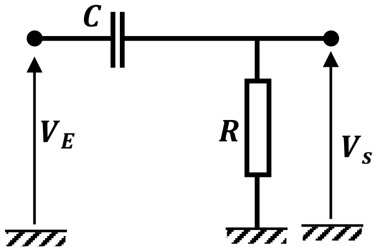


Le tableau suivant regroupe les fonctions que l'on rencontre très fréquemment.

Fonction	Diagramme de Bode asymptotique
$H(j\omega) = \dfrac{1}{j\,\dfrac{\omega}{\omega_o}}$	
$H(j\omega) = j\,\dfrac{\omega}{\omega_o}$	
$H(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\,\dfrac{\omega}{\omega_o}}$	
$H(j\omega) = 1 + j\,\dfrac{\omega}{\omega_o}$	

- ***Filtre passe haut***

Le schéma d'un filtre passe haut passif est le suivant :



Objectif :

- Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{Vs}{Ve}$
- Exprimer la fréquence de coupure
- Exprimer le module et la phase du filtre
- Tracer le diagramme de Bode

- ***La fonction de transfert $H(j\omega)$:***

Appliquons la formule de diviseur de tension aux bornes de la résistance :

$$Vs = \frac{R}{R+\frac{1}{jc\omega}} Ve = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} Ve \quad \text{donc} \quad \boldsymbol{H(j\omega) = \frac{Vs}{Ve} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}}$$

- ***La fréquence de coupure $f0$:***

La fonction canonique d'un filtre passe haut 1re ordre se met sous la forme: $\boldsymbol{H(j\omega) = \frac{K.\, j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}}$

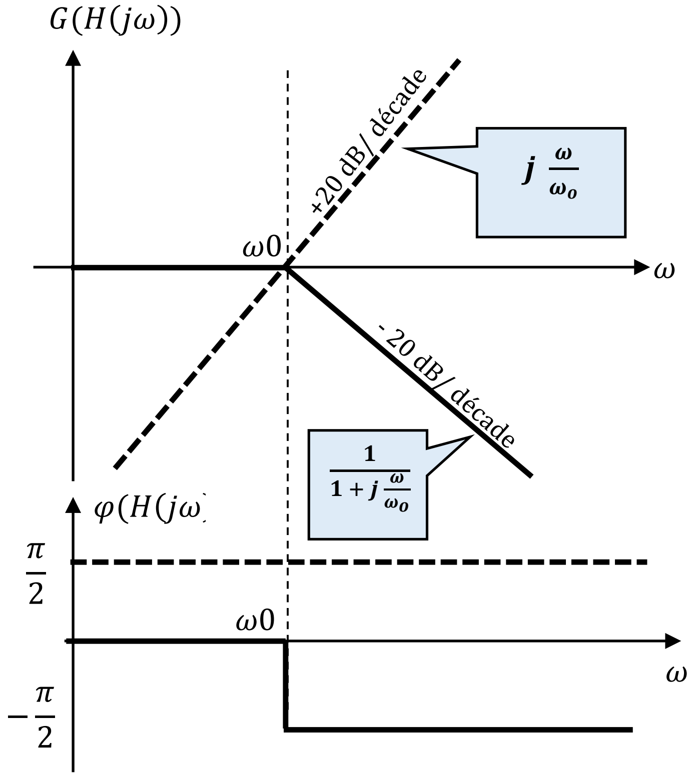
Par identification de la fonction de transfert avec la forme canonique alors :

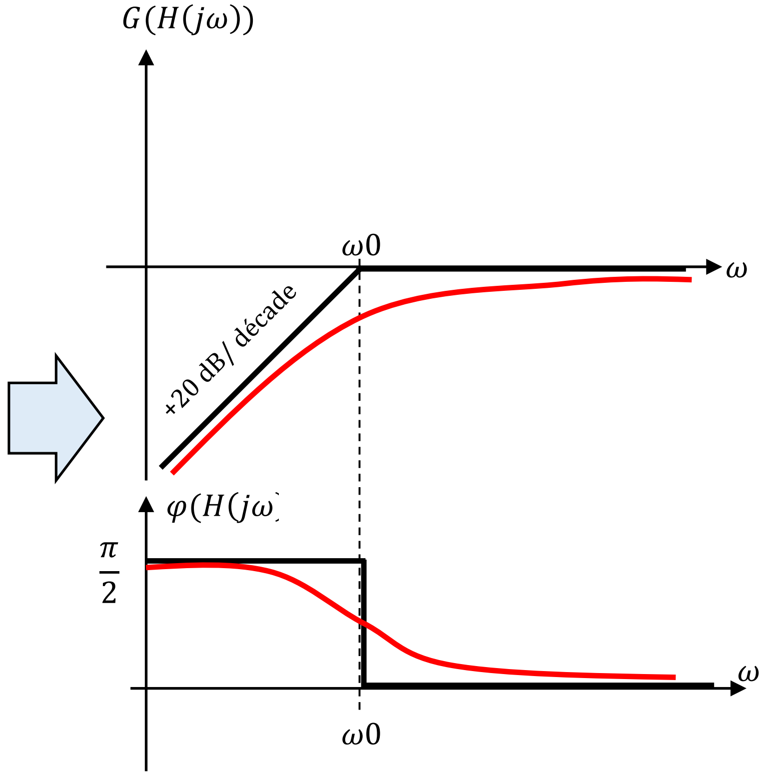
$$\boldsymbol{K = 1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

- ***Diagramme de Bode :***

Nous allons tracer tout d'abord les trois fonctions après on va faire une somme logarithmique.

$$\boldsymbol{H(j\omega) = K.\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right)}$$



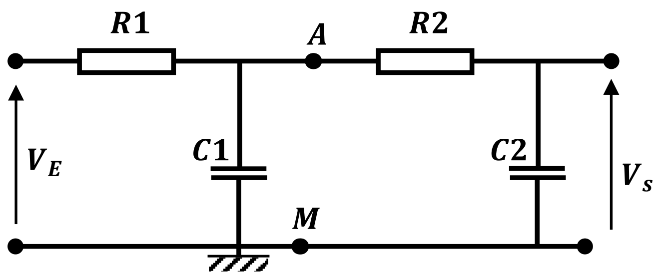


2. Filtres classiques du deuxième ordre

2.1 Filtre 2ème ordre en cascade

- **<u>Filtre passe bas 2ème ordre</u>**

  Soit :

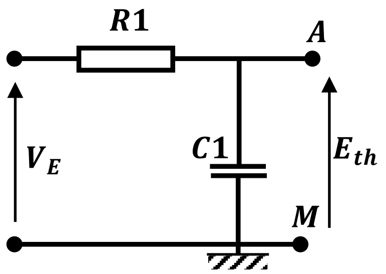


Objectif :

- Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{Vs}{Ve}$
- Exprimer la pulsation propre
- Exprimer le facteur d'amortissement
- Tracer le diagramme de Bode

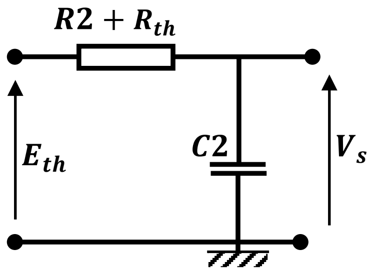
- ***<u>La fonction de transfert $H(j\omega)$:</u>***

  Appliquons le théorème de Thévenin entre A et M :



$$\underline{E_{th}} = \frac{1}{1+jR_1C_1\omega}\,\underline{V_E}$$

$$\underline{R_{th}} = \frac{R_1}{1+jR_1C_1\omega}$$



montage 2

A partir du montage 2 : $V_s = E_{th}\dfrac{\frac{1}{jC_2\omega}}{R_{th}+R_2+\frac{1}{jC_2\omega}} = \dfrac{V_E}{1+jR_1C_1\omega}\dfrac{\frac{1}{jC_2\omega}}{\frac{R_1}{1+jR_1C_1\omega}+R_2+\frac{1}{jC_2\omega}}$

Après une simplification nous avons trouvé : $\boldsymbol{H(j\omega)} = \dfrac{1}{1+j\,(R_2C_2+R_1C_1+R1C2)\omega + j^2R_1R_2C_1C_2\omega^2}$

- ***<u>La pulsation propre ω_o et le facteur d'amortissement :</u>***

  La fonction canonique d'un filtre passe haut 2ème ordre se met sous la forme :

  $\boldsymbol{H(j\omega)} = \dfrac{K}{1+2m\,j\frac{\omega}{\omega_o}+\left(j\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}$ où m est appelé **le coefficient (facteur) d'amortissement**

  Par identification de la fonction de transfert avec la forme canonique alors :

$$\boldsymbol{K=1} \quad ; \quad \frac{m}{\omega_o} = R_2C_2 + R_1C_1 + R1C2 \text{ et } \boldsymbol{\omega_o} = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

  Donc le facteur d'amortissement : $\boldsymbol{m} = \dfrac{R_2C_2+R_1C_1+R1C2}{2\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$

- ***<u>Diagramme de Bode :</u>***

  Pour tracer le diagramme de Bode, il vient d'étudier le comportement de module $H(j\omega)$ en fonction du facteur d'amortissement m et de la pulsation réduite $\frac{\omega}{\omega_o}$.

  On a : $H(j\omega) = \dfrac{K}{1+2m\,j\frac{\omega}{\omega_o}+\left(j\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2} = \dfrac{K}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]+\ j\left[2m\frac{\omega}{\omega_o}\right]}$

  On pose $x = \frac{\omega}{\omega_o}$ ➔ $H(jx) = \dfrac{K}{[1-x^2]+\ j\ [2m\,x]}$

- Le module de $H(jx)$: $|H(jx)| = \frac{K}{\sqrt{[1-x^2]^2 + [2m\,x]^2}}$
- La phase de $H(jx)$: $\varphi(x) = -\arctan\frac{2m\,x}{1-x^2}$

la valeur de x où le module de $H(jx)$ est maximal :

- Calculons la dérivée de$|H(jx)|$

$$\frac{d|H(jx)|}{d\,x} = -\frac{K}{2}\frac{4x^3-4x(1-2\,m^2)}{\left(\sqrt{(1-x^2)^2+4m^2x^2}\right)^3} = 0$$

- La dérivée s'annule pour les valeurs de x annulant $4x^3 - 4x(1-2\,m^2)$

$$4x^3 - 4x(1-2\,m^2) = 4x.\left(x^2 - (1-2\,m^2)\right) = 0$$

On obtient alors une seule racine $x = 0$ si $m > 0.7$ et deux racine $x = 0$ et $x = \sqrt{1-2\,m^2}$ si $m < 0.7$.

Donc le module $\left|H\left(j\frac{\omega}{\omega_o}\right)\right|$ est maximal lorsque $\boldsymbol{\frac{\omega}{\omega_o} = \sqrt{1-2\,m^2}}$ si et seulement le facteur d'amortissement **inférieur à 0.7**, ce point maximal est appelé **le point de résonnance.**

La résonnance :

La résonance est un phénomène selon lequel **certains systèmes physiques** sont **sensibles** à certaines **fréquences**. Un système résonant peut **accumuler une énergie,** si celle-ci est appliquée sous forme périodique, et proche d'une fréquence dite « **fréquence de résonance** »

Pulsation de résonnance

On note ω_R la pulsation de résonance où le module de $H(j\omega)$ est maximal. Nous avons montré que $|H(jx)|$ respecte ce condition lorsque $x = \sqrt{1-2\,m^2}$ (si m< 0.7).

Alors $x = \frac{\omega}{\omega_o} = \sqrt{1-2\,m^2} = \boldsymbol{\frac{\omega_R}{\omega_o}}$

➔ la pulsation de résonnance s'exprime alors : $\boldsymbol{\omega_R = \omega_o\sqrt{1-2\,m^2}}$ ➔ donc le module maximal $\boldsymbol{Hmax = |H(j\omega_R)| = \frac{k}{m\sqrt{2}}}$

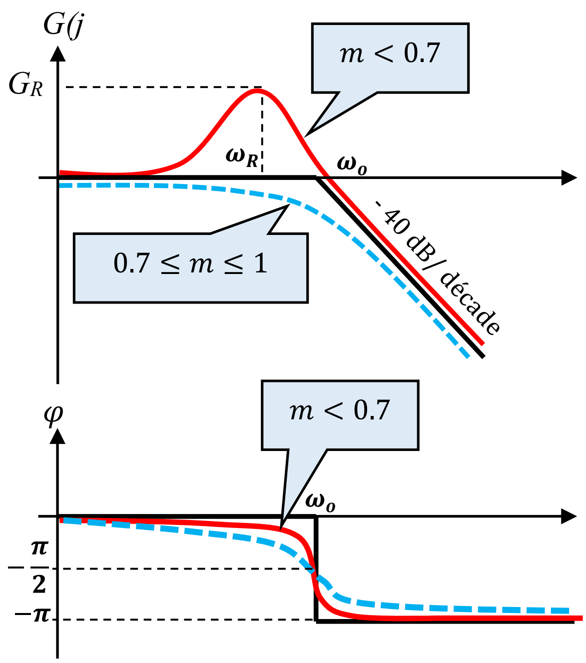
Le diagramme de Bode : K=1

- Pour $\boldsymbol{\omega = 0}$:

  $|H(jx)| \approx k$ ➔ $G_{dB} = 0$; $\varphi = 0$
- Pour $\boldsymbol{\omega = +\infty}$:

  $|H(jx)| \approx \frac{k}{\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}$ ➔ $G_{dB} = -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)$; $\varphi = -\pi$
- Pour $\boldsymbol{\omega = \omega_o}$:

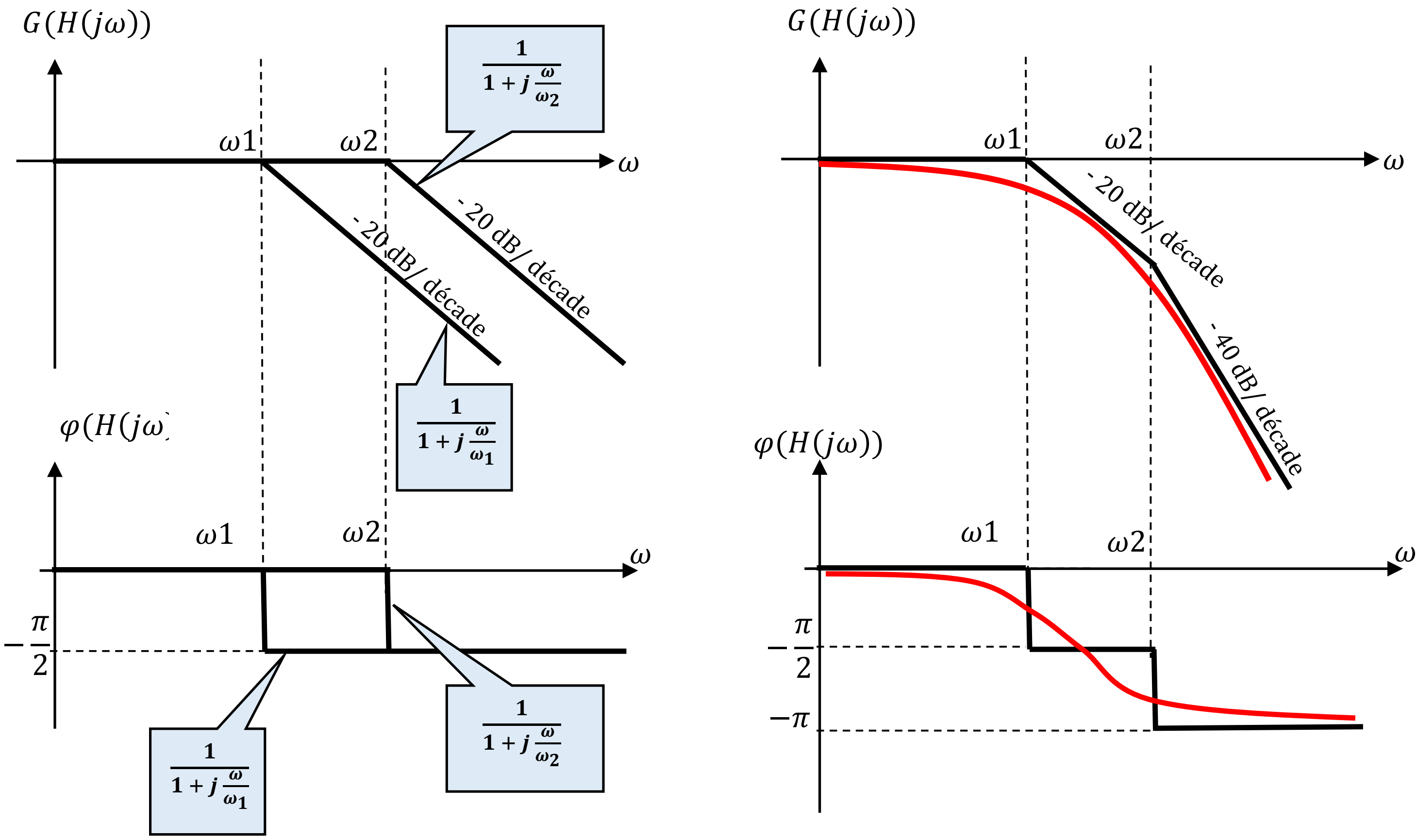
  $|H(jx)| = \frac{k}{2m}$ ➔ $G_{dB} = -20\log\left(\frac{k}{2m}\right)$; $\varphi = -\frac{\pi}{2}$



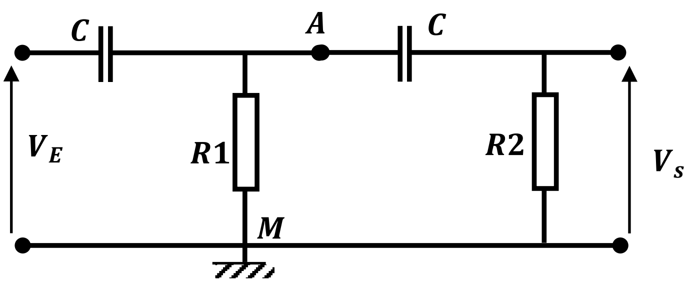
Le diagramme de Bode lorsque $m > 1$

On a : $H(j\omega) = \frac{K}{1+2m\,j\frac{\omega}{\omega_o}+\left(j\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2} = \frac{K}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$

avec $\omega_1 = \omega_o\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)$ et $\omega_2 = \left(m+\sqrt{m^2-1}\right)$ donc $\omega_2 > \omega_1$ (les pulsations de coupure)



- **<u>Filtre passe haut 2ème ordre</u>**



En appliquons le théorème de Thévenin entre A et M. La fonction de transfert s'écrit :

$$V_s = E_{th}\frac{R2}{R_{th}+R_2+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{V_E\,.jR_1C\,\omega}{1+jR_1C\,\omega}\;\frac{R2}{\frac{R_1}{1+jR_1C\,\omega}+R_2+\frac{1}{jC\,\omega}}$$

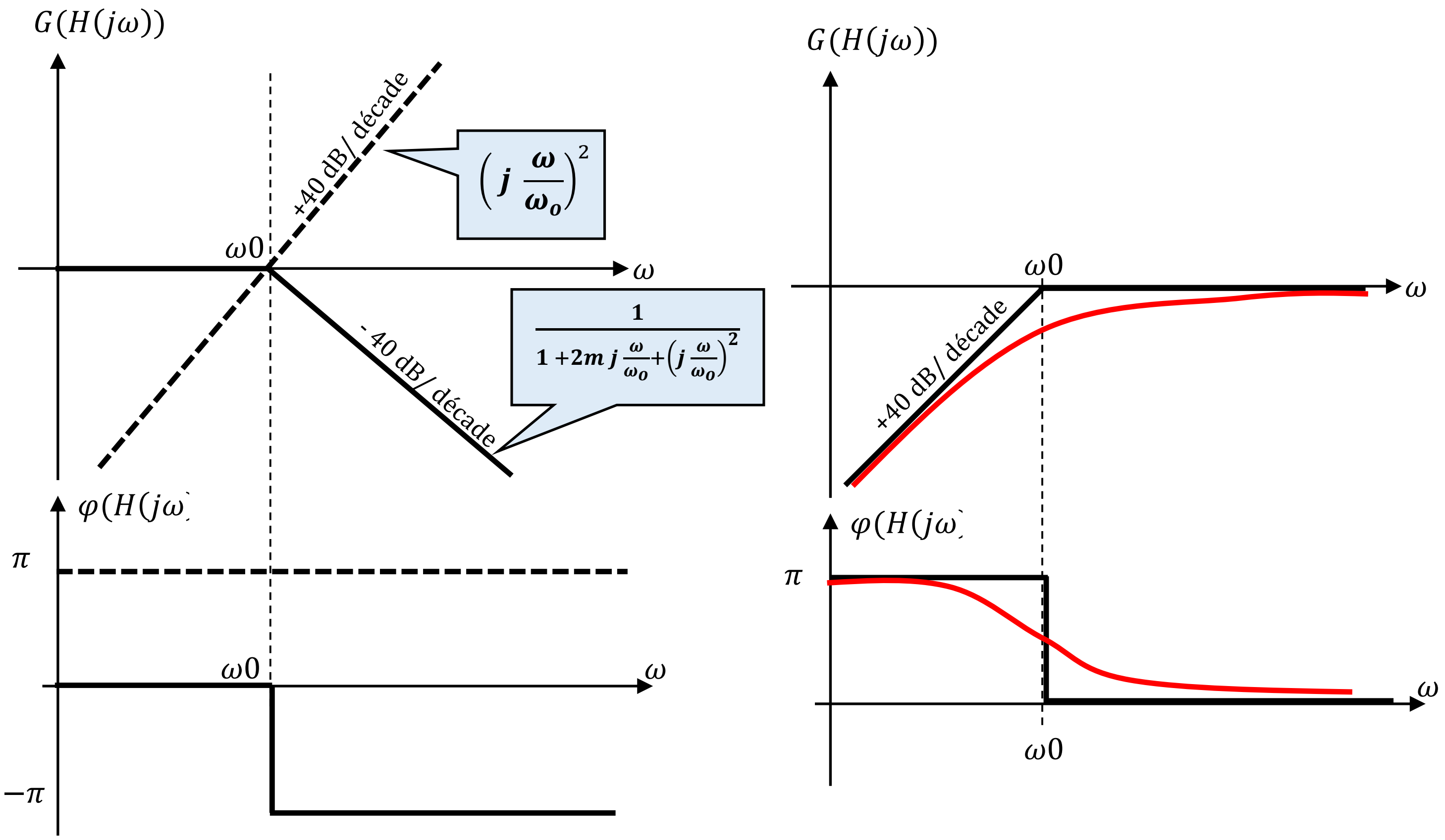
la fonction transfert est : $H(j\omega) = \frac{j^2R_1R_2C^2\,\omega^2}{1+j\,(2R_1+R_2)C\,\omega+j^2R_1R_2C^2\,\omega^2}$

- ***<u>La pulsation propre ω_o et le facteur d'amortissement :</u>***

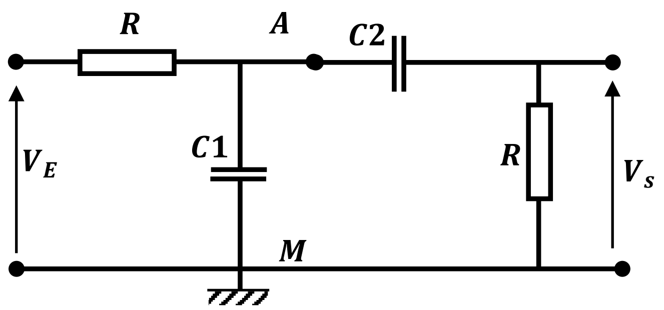
La fonction canonique d'un filtre passe haut 2ème ordre se met sous la forme :

$$\boldsymbol{H(j\omega) = \frac{K\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+2m\,j\frac{\omega}{\omega_0}+\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \Rightarrow \textbf{avec } \boldsymbol{K=1\,;\,m=\frac{2R_1+R_2}{2\sqrt{R_1R_2}}} \textbf{ et } \boldsymbol{\omega 0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2}\,.\,C}}$$

Le diagramme de Bode pour m=0.7



- **<u>Filtre passe bande 2ème ordre</u>**



En appliquons le théorème de Thévenin entre A et M. La fonction de transfert s'écrit :

$$V_s = E_{th}\frac{R}{R_{th}+R+\frac{1}{jC_2\omega}} = \frac{V_E}{1+jR\,C_1\,\omega}\,\frac{R}{\frac{R}{1+jR\,C1\;\omega}+R+\frac{1}{jC_2\omega}}$$

la fonction transfert est : $H(j\omega) = \frac{jRC2\;\omega}{1+j\,R\,(C_1+2\,C_2)\,\omega+j^2R^2\,C1C2\,\omega^2}$

- ***<u>La pulsation propre ω_o et le facteur d'amortissement :</u>***

La fonction canonique d'un filtre passe bande 2ème ordre se met sous la forme :

$$\boldsymbol{H(j\omega)} = \frac{\boldsymbol{K\;2m\,j\frac{\omega}{\omega_o}}}{\boldsymbol{1+2m\,j\frac{\omega}{\omega_o}+\left(j\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}} \;\Rightarrow\; H(j\omega) = \frac{C2}{(C_1+2C_2)}\,\frac{jR(C_1+2\,C_2)\,\omega}{1+j\,R\,(2C_1+C_2)\,\omega+j^2R^2\,C1C2\,\omega^2}$$

Par identification : $\boldsymbol{K} = \frac{C2}{(C_1+2C_2)}$; $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{C_1+2C_2}}{\boldsymbol{2\sqrt{C_1C_2}}}$ et $\boldsymbol{\omega 0} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{C_1C_2}\,.\,R}}$

Diagramme de Bode d'un filtre passe bande

La fonction de transfert : $H(j\omega) = \dfrac{K\ 2m\ j\,\frac{\omega}{\omega_o}}{1+2m\ j\,\frac{\omega}{\omega_o}+\left(j\,\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}$ on pose $x = \dfrac{\omega}{\omega_o}$

$$\Rightarrow\ H(jx) = \frac{K\ 2m\ j\ x}{1+2m\ j\ x+(j\ x)^2} = \frac{K\ 2m\ j\ x}{(1-x^2)+2m\ j\ x} = \frac{k}{1+j\ Q\ (x-\frac{1}{x})}$$

une autre forme canonique d'un filtre passe bande est : $H(jw) = \dfrac{k}{1+j\ Q\ (\frac{\omega}{\omega_o}-\frac{\omega_o}{\omega})}$ avec Q est le facteur de qualité $Q = \dfrac{1}{2m}$.

Le module $H(j\omega)$: $|H(j\omega)| = \dfrac{k}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_o}-\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}}$ et la phase $\varphi = -\arctan\left[Q\ (\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega})\right]$

- Pour $\omega \ll \omega_o$: ➔ $\frac{\omega}{\omega_o} \ll 1$ donc on néglige $\frac{\omega}{\omega_o}$ devant $\frac{\omega_o}{\omega}$

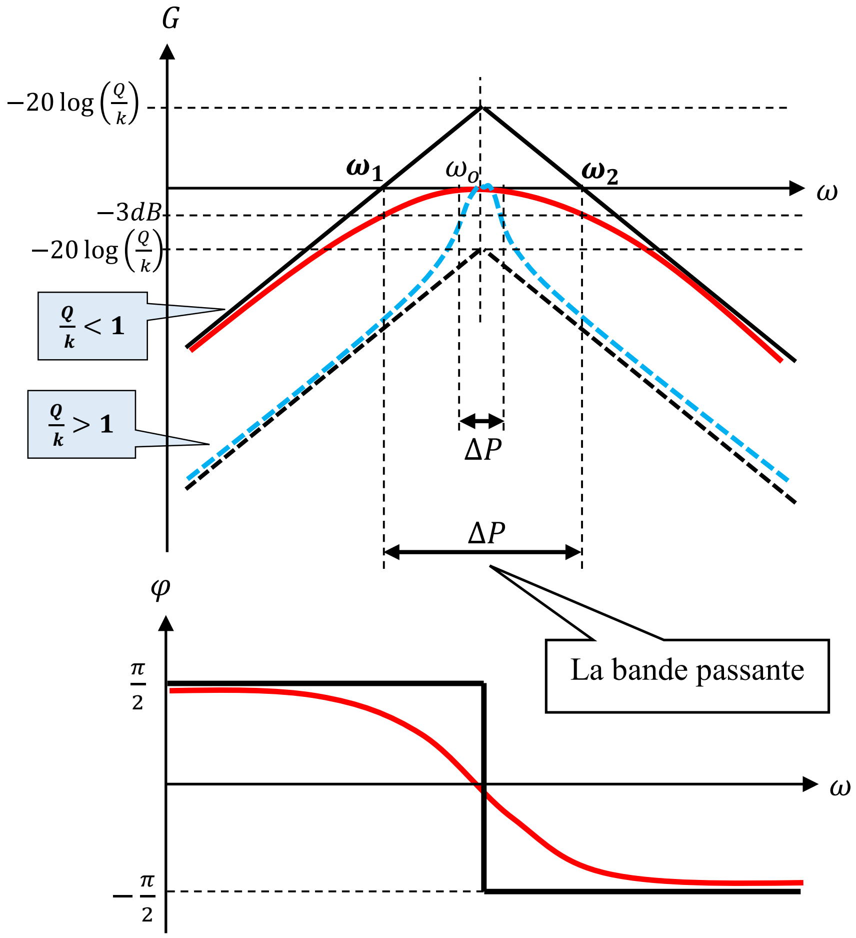
  $|H(j\omega)| \cong \frac{k}{Q}.\frac{\omega}{\omega_o}$ ➔ $GdB \cong -20\log\left(\frac{Q}{k}\right) + 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)$; $\varphi \cong -\arctan(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$

- Pour $\omega \gg \omega_o$: ➔ $\frac{\omega}{\omega_o} \gg 1$ donc on néglige $\frac{\omega_o}{\omega}$ devant $\frac{\omega}{\omega_o}$

  $|H(j\omega)| \cong \frac{k}{Q}.\frac{1}{\frac{\omega}{\omega_o}}$ ➔ $GdB \cong -20\log\left(\frac{Q}{k}\right) - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)$; $\varphi \cong -\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

- Pour $\omega = \omega_o$:

  $|H(j\omega)| = k$ ➔ $GdB \cong 20\log k$; $\varphi \cong -\arctan(0) = 0$



La bande passante :

La bande passante à -3 dB est la zone de fréquence pour laquelle on a un gain supérieur ou égale à $G_{max} - 3$ dB

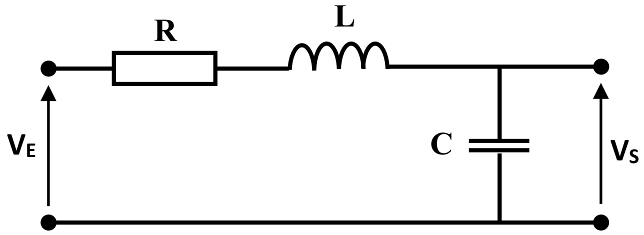
S'exprime :

$$\Delta P = \omega_2 - \omega_1 = 2m.\omega_o = \frac{\omega_o}{Q}$$

! L'augmentation du facteur de qualité Q, entrainera une sélectivité du filtre (la bande passante devient étroite)

2.2. Filtre RLC deuxième ordre

2.2.1. Filtre passe bas



Objectif :

- Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{Vs}{Ve}$
- Exprimer la pulsation propre
- Exprimer le facteur d'amortissement

En appliquons la formule de diviseur de tension au borne de condensateur C.

$$V_s = V_E \frac{\frac{1}{jC\,\omega}}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\,\omega}}$$

la fonction transfert est : $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\,R\,C\,\omega + j^2 L\,C\,\omega^2}$

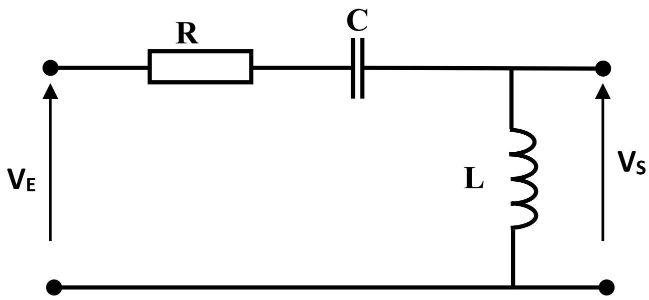
- ***La pulsation propre ω_o et le facteur d'amortissement :***

La fonction canonique d'un filtre passe bas 2ème ordre se met sous la forme :

$$\boldsymbol{H(j\omega) = \frac{K}{1 + 2m\,j\frac{\omega}{\omega_o} + \left(j\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}$$

Par identification : $\boldsymbol{K = 1\ ;\ m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}}$ **et** $\boldsymbol{\omega 0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}}$

2.2.2. Filtre passe haut



Objectif :

- Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{Vs}{Ve}$
- Exprimer la pulsation propre
- Exprimer le facteur d'amortissement

En appliquons la formule de diviseur de tension au borne de l'inductance L.

$$V_s = V_E \frac{jL\omega}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\,\omega}}$$

la fonction transfert est : $H(j\omega) = \frac{j^2 L\,C\,\omega^2}{1 + j\,R\,C\,\omega + j^2 L\,C\,\omega^2}$

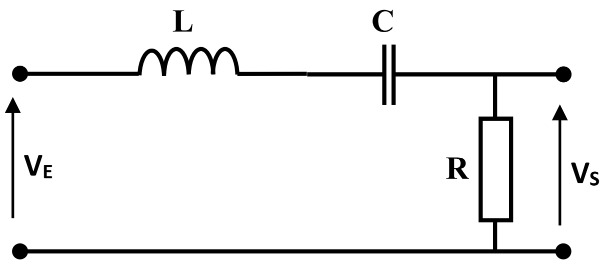
- ***La pulsation propre ω_o et le facteur d'amortissement :***

La fonction canonique d'un filtre passe haut 2ème ordre se met sous la forme :

$$\boldsymbol{H(j\omega) = \frac{K\left(j\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}{1 + 2m\,j\frac{\omega}{\omega_o} + \left(j\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}$$

Par identification : $\boldsymbol{K = 1\ ;\ m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}}$ **et** $\boldsymbol{\omega 0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}}$

2.2.3. Filtre passe bande



Objectif :

- Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{Vs}{Ve}$
- Exprimer la pulsation propre
- Exprimer le facteur d'amortissement

En appliquons le théorème de diviseur de tension. La fonction de transfert s'écrit :

$$V_s = V_E \frac{R}{j\,L\,\omega + R + \frac{1}{jC\,\omega}} = \frac{j\,R\,C\,\omega}{1 + j\,R\,C\,\omega + j^2 L\,C\,\omega^2}$$

la fonction transfert est : $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{R}\left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)}$

- ***La pulsation propre ω_o et le facteur d'amortissement :***

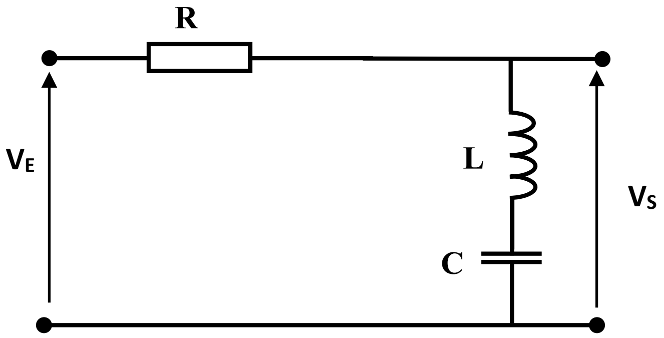
La fonction canonique d'un filtre passe bande 2ème ordre se met sous la forme :

$$H(jw) = \frac{k}{1 + j\,Q\,(\frac{\omega}{\omega_O} - \frac{\omega_O}{\omega})}$$

Par identification : $\boldsymbol{K} = 1\,;\, \boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{2}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{L}}}$ et $\boldsymbol{\omega 0} = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{L\,C}}}$

Facteur de qualité **:** $\boldsymbol{Q} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{C}}}$

2.2.4. Filtre coupe bande



Objectif :

- Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{Vs}{Ve}$
- Exprimer la pulsation propre
- Exprimer le facteur d'amortissement
- Tracer le diagramme de Bode

En appliquons le théorème de diviseur de tension. La fonction de transfert s'écrit :

$$V_s = V_E \frac{j\,L\,\omega + \frac{1}{jC\,\omega}}{j\,L\,\omega + R + \frac{1}{jC\,\omega}} = \frac{1 + j^2 L\,C\,\omega^2}{1 + j\,R\,C\,\omega + j^2 L\,C\,\omega^2}$$

la fonction transfert est : $H(j\omega) = \frac{j\frac{1}{R}\left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)}{1 + j\frac{1}{R}\left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)}$

- ***La pulsation propre ω_o et le facteur d'amortissement :***

La fonction canonique d'un filtre passe bande 2ème ordre se met sous la forme :

$$H(jw) = \frac{k\,j\,Q\left(\frac{\omega}{\omega_O} - \frac{\omega_O}{\omega}\right)}{1 + j\,Q\left(\frac{\omega}{\omega_O} - \frac{\omega_O}{\omega}\right)} \quad \text{ou} \quad H(j\omega) = K\,\frac{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_O}\right)^2}{1 + 2m\,j\frac{\omega}{\omega_O} + \left(j\frac{\omega}{\omega_O}\right)^2}$$

Par identification : $\boldsymbol{K} = 1$; $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{2}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{L}}}$ et $\boldsymbol{\omega 0} = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{L\,C}}}$

Facteur de qualité **:** $\boldsymbol{Q} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{C}}}$

Diagramme de Bode d'un filtre passe bande :

La forme canonique d'un filtre passe bande est : $H(jw) = \dfrac{k\, j\, Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)}{1 + j\, Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)}$

Le module $H(j\omega)$: $|H(j\omega)| = \dfrac{k\,.\,Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}}$ et la phase $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} - \arctan\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)\right]$

$-\frac{\pi}{2}$ si $k\,.\,Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right) < 0$

$+\frac{\pi}{2}$ si $k\,.\,Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right) > 0$

Les cas possibles pour tracer le diagramme de Bode :

- Pour $\omega \ll \omega_o$: ➔ $\frac{\omega}{\omega_o} \ll 1$ donc on néglige $\frac{\omega}{\omega_o}$ devant $\frac{\omega_o}{\omega}$

  $|H(j\omega)| \cong K$ ➔ $GdB \cong +20\log(K)$; $\varphi \cong -\frac{\pi}{2} - \arctan(-\infty) = 0$

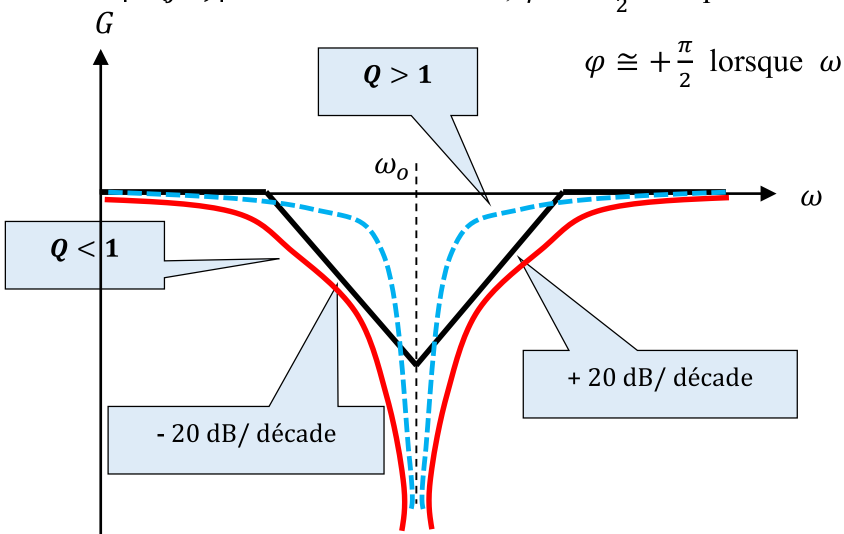
- Pour $\omega \gg \omega_o$: ➔ $\frac{\omega}{\omega_o} \gg 1$ donc on néglige $\frac{\omega_o}{\omega}$ devant $\frac{\omega}{\omega_o}$

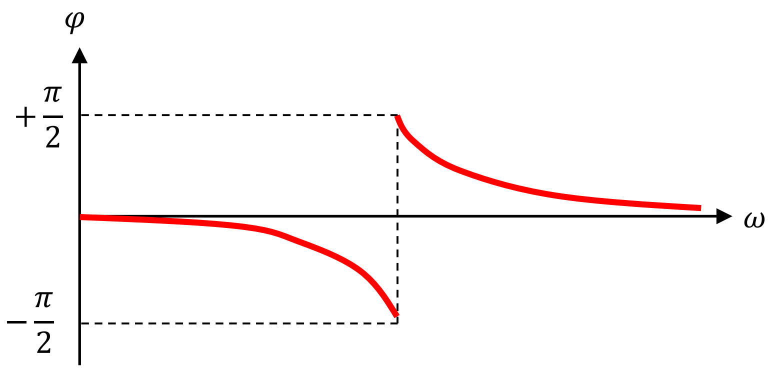
  $|H(j\omega)| \cong k$ ➔ $GdB \cong +20\log(K)$; $\varphi \cong \frac{\pi}{2} - \arctan(+\infty) = 0$

- Pour $\omega = \omega_o$:

  $|H(j\omega)| = 0$ ➔ $GdB \cong -\infty$; $\varphi \cong -\frac{\pi}{2}$ lorsque $\omega = {\omega_o}^-$ et

  $\varphi \cong +\frac{\pi}{2}$ lorsque $\omega = {\omega_o}^+$





Références

- Cours Génie électrique « Crestoph Françoi »
- Représentation graphique du comportement fréquentiel - diagramme de Bode « Michel PIOU »
- Cours de génie électrique - les filtres analogiques 2007/2008- « M. BENGMAIH »
- Précis de l'électronique « Jean-Luc AZAN »