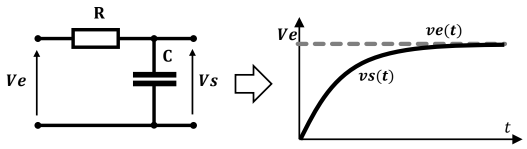
La représentation d'un système asservi est la représentation par fonction de transfert ou schéma-bloc simplifie l'analyse et la conception des systèmes automatiques. Elle permet de modéliser les relations entrée-sortie, facilitant ainsi la résolution des problèmes de stabilité et de performance. Le schéma-bloc, plus visuel, est souvent préféré pour sa clarté et son efficacité.

Notions de système

Un système est un ensemble de composants physiques connectés entre eux pour former une entité cohérente. On distingue deux types de systèmes :

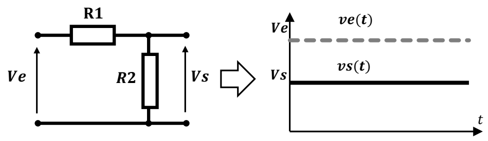
1- Système dynamique

Un système dynamique analyse les phénomènes en tenant compte des valeurs passées, où les sorties dépendent des valeurs présentes et passées des entrées.



2 – Système statique

Un système statique produit une sortie indépendante du temps, ne dépendant pas des valeurs passées. Par exemple, la tension aux bornes de R2 suit la relation :



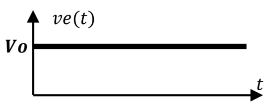
$$Vs = Ve\,\frac{R2}{R1+R2}$$

Notion de signaux

1- Signaux d'entrées

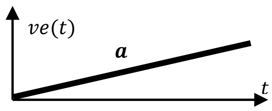
Un signal est l'excitation appliquée à un système de commande provenant d'une source d'énergie extérieure, généralement dans le but de provoquer une réponse spécifique. On distingue :

Echelon d'amplitude



$$\begin{cases} ve(t) = Vo.u(t) & si\ t \geq 0 \\ ve(t) = 0 & si\ t < 0 \end{cases} \Rightarrow Ve(p) = \frac{Vo}{p}$$

Rampe à ponte a



$$\begin{cases} ve(t) = a.t & si\ t \geq 0 \\ ve(t) = 0 & si\ t < 0 \end{cases} \Rightarrow Ve(p) = \frac{a}{p^2}$$

2- signaux de sortie

Le signal de sortie est la réponse réelle obtenue à partir du système de commande. Elle peut correspondre ou non à la réponse attendue que le signal d'entrée devrait normalement provoquer.

Systèmes Linéaires Continus Invariants SLCI

Un système linéaire est un système où les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent être exprimées sous forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants.

1- Représentation par l'équation de transfert

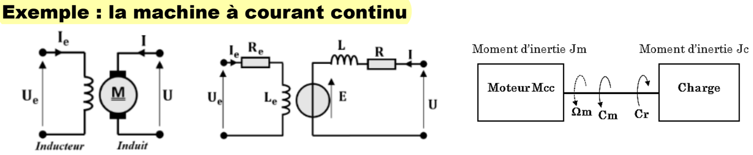
Soit un système décrit par une équation différentielle liant l'entrée u(t) à la sortie y(t):

$$b_m \frac{dy^m}{dt^m} + b_{m-1}\frac{dy^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{dy^1}{dt^1} + b_0\, y = a_n\frac{du^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{du^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{du^1}{dt^1} + a_0\, u$$

- Pour des conditions initiales supposées nulles, est donnée par : $L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n.F(p)$
- La fonction de transfert s'écrit par : $\mathbf{H(p)} = \frac{a_n P^n + a_{n-1}P^{n-1} + \ldots + a_1 P + a_0}{b_m P^m + b_{m-1}P^{m-1} + \ldots + b_1 P + b_0}$

Remarque : *Un système est réalisé pratiquement,* ***il faut que : $m > n$***

Exemple : la machine à courant continu



Equations de la MCC (moteur)	Equations en domaine de Laplace
$e(t) = Ke.\Omega(t)$	$E(p) = Ke.\Omega(p)$
$u(t) = e(t) + L\frac{di(t)}{dt} + R.i(t)$	$U(p) = E(p) + L.p.I(p) + R.I(p)$
$Cm(t) = Kc.i(t)$	$Cm(p) = Kc.I(p)$
$J\frac{d\Omega(t)}{dt} = Cm(t) - Cr(t) - f.\Omega(t)$	$J.p.\Omega(p) = Cm(p) - Cr(p) - f.\Omega(p)$

- La fonction de transfert de la mcc à vide (Cr =0) : $\mathbf{M(p)} = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$

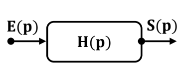
$$\mathbf{M(p)} = \frac{Ke}{J.L.p^2 + (J.R+L.f)p + R.f + Ke.Kc}$$

2- Représentation par le schéma fonctionnel

Le schéma fonctionnel modélise graphiquement un système physique, illustrant efficacement les relations fonctionnelles entre ses composants, offrant ainsi une meilleure compréhension des interactions dans un système de commande.

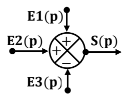
❖ Eléments d'un schéma fonctionnel

A- Bloc



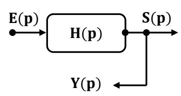
$S(p) = H(p).E(p)$

B- Sommateur



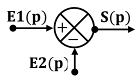
$S(p) = E1(p) + E2(p) - E3(p)$

C- Jonction



$Y(p) = S(p) = H(p).E(p)$

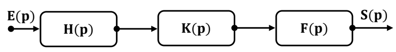
D- Comparateur



$S(p) = E1(p) - E2(p)$

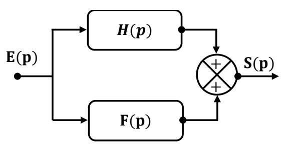
❖ Règles relatives aux schémas fonctionnels

A- Blocs en série (Cascade)



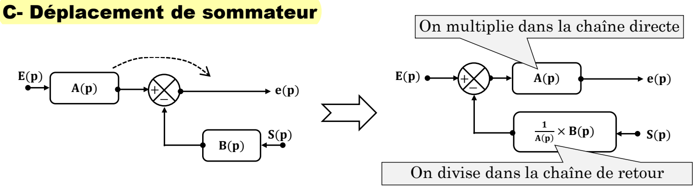
$S(p) = F(p).K(p).H(p).E(p)$

B- Blocs en parallèle

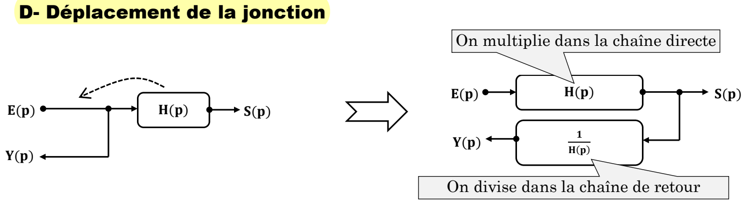


$S(p) = (F(p) + H(p)).E(p)$

C- Déplacement de sommateur



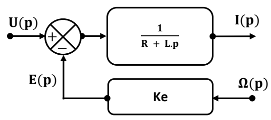
D- Déplacement de la jonction



Application : la machine à courant continu (MCC)

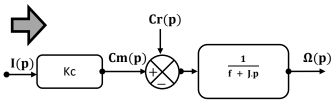
- **Equations électriques**

Eq 1 :	$E(p) = Ke.\Omega(p)$
Eq 2 :	$U(p) = E(p) + L.p.I(p) + R.I(p)$

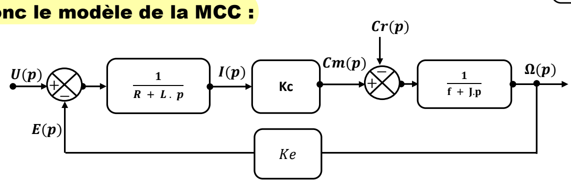


- **Equations mécaniques**

Eq 3 :	$Cm(p) = Kc.I(p)$
Eq 4 :	$J.p.\Omega(p) = Cm(p) - Cr(p) - f.\Omega(p)$



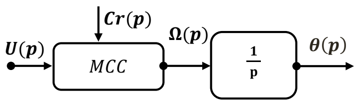
- **Donc le modèle de la MCC :**



Parfois cette machine (MCC) peut être contrôlée en position $\theta(t)$.

Sachant que : $\theta(t) = \int \Omega(t)\,dt$ ➔ $\theta(p) = \frac{1}{p}\,\Omega(p)$

Ainsi, nous ajoutons un autre bloc en cascade avec le bloc MCC :

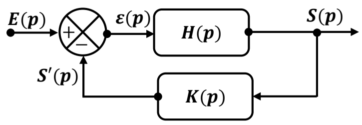


Conclusion : la machine à courant continu dispose :

- Deux entrée une **entrée commande** U(p) et l'autre **perturbation** (Cr(p)).
- Une sortie **vitesse** Ω(p) (ou **position** θ(p)).

Schéma canonique d'un système asservi

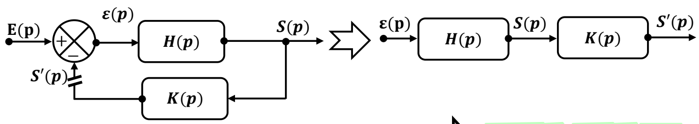
Un système de commande en boucle fermée est constitué de plusieurs organes (préactionneur, actionneur, capteur, système…), ce schéma fonctionnel peut être réduit au schéma canonique suivant :



Avec :

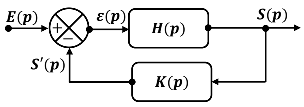
- **H(p) :** la fonction de transfert de la chaine directe
- **K(p) :** la fonction de transfert de la chaine de retour

1 – fonction de transfert en boucle ouverte : $FTBO(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)}$



FTBO(p) = chaine directe × chaine de retour ➔ $FTBO(p) = K(p).H(p)$

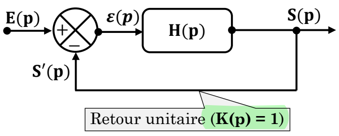
2- Fonction de transfert en boucle fermée : $FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$



➔ $FTBF(p) = \frac{chaine\ directe}{1 + FTBO(p)}$

Donc : $FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + K(p).H(p)}$

➲ **Cas couramment rencontré : schéma bloc à retour unitaire**



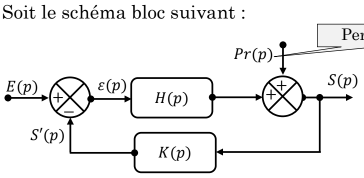
➔ $FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{H(p)}{1 + H(p)}$

Remarque : *La fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) analyse la stabilité intrinsèque d'un système sans rétroaction. La fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) intègre la rétroaction pour étudier stabilité, performance et ajuster les paramètres selon les spécifications requises.*

Effet de la perturbation en un système asservi

Une perturbation modifie la sortie d'un système. Dans un moteur à courant continu, la vitesse est affectée par le couple résistant Cr, considéré comme une perturbation influençant le comportement dynamique.

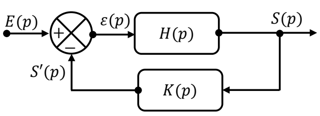
Soit le schéma bloc suivant :



La sortie s'exprime par : $S(p) = F1(p).E(p) + F2(p).Pr(p)$

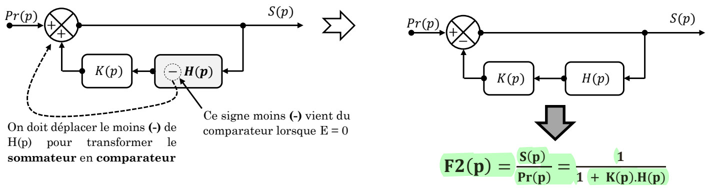
Objectif : Détermination de F1(p) et F2(p) en appliquant le théorème de superposition

➲ **La fonction de transfert F1(p) :** $Pr(p) = 0$ ➔ $F1(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ (il s'agit d'une FTBF)



➔ $F1(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1+K(p).H(p)}$

➲ **La fonction de transfert F2(p) :** $E(p) = 0$ ➔ $F2(p) = \frac{S(p)}{Pr(p)}$ (il s'agit d'une FTBF)

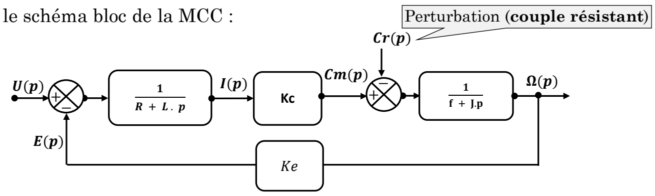


$F2(p) = \frac{S(p)}{Pr(p)} = \frac{1}{1 + K(p).H(p)}$

D'où : $S(p) = \frac{H(p)}{1 + K(p).H(p)}.E(p) + \frac{1}{1 + K(p).H(p)}.Pr(p)$

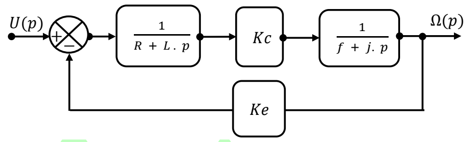
Application : la machine à courant continu (MCC)

Soit le schéma bloc de la MCC :



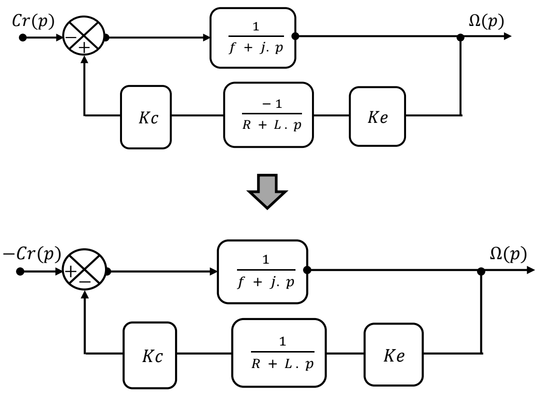
La sortie vitesse s'exprime par : $\Omega(p) = H1(p).U(p) + H2(p).Cr(p)$

➲ **La fonction de transfert H1(p) :** $Cr(p) = 0$ ➔ $H1(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$



Donc : $H1(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{Ke}{J.L.p^2 + (J.R + L.f)p + R.f + Ke.Kc}$

➲ **La fonction de transfert H2(p) :** $Cr(p) = 0$ ➔ $H2(p) = \frac{\Omega(p)}{Cr(p)}$



Donc : $H2(p) = \frac{\Omega(p)}{Cr(p)} = \frac{-(R + L.p)}{J.L.p^2 + (J.R + L.f)p + R.f + Ke.Kc}$

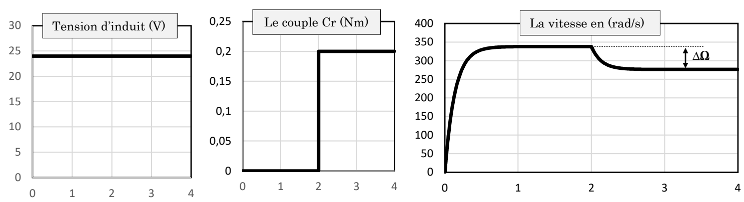
L'expression de la sortie est :

Prenons : $D(p) = J.L.p^2 + (J.R + L.f)p + R.f + Ke.Kc$

D'où : $\Omega(p) = \frac{Kc}{D(p)}.U(p) - \frac{(R + L.p)}{D(p)}.Cr(p)$

Remarque importante : *Les deux fonctions H1 et H2 doivent avoir le même dénominateur (d'après* **la formule de Mason***), sinon vos calculs seront incorrects.*

➲ **Simulation :** la machine à courant continu M540 E 24 V 2500 tr/min



Remarque : *On constate qu'après la perturbation (à 2 s), la vitesse diminue, ce qui indique que celle-ci est influencée par la perturbation (couple résistant). Il est donc essentiel d'ajuster correctement la vitesse de cette machine (par implantation d'un correcteur).*