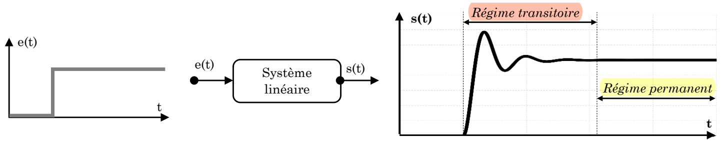
Synthèse d'analyse temporelle des SLCI — TSI SUP — Pr A. OUAANABI (www.autocpge.info)

L'analyse temporelle permet de caractériser le comportement transitoire des systèmes linéaires. L'étude se concentre sur les systèmes du premier et du deuxième ordre, fréquemment rencontrés en pratique. De nombreux systèmes plus complexes peuvent d'ailleurs être approximés par ces modèles simples, dont les caractéristiques temporelles sont bien maîtrisées grâce à leur fonction de transfert.

C'est quoi l'analyse temporelle ?

La réponse temporelle, ou réponse indicielle, est déterminée expérimentalement en excitant le système à un signal d'excitation de type **échelon**, puis en observant sa réaction dans le temps (**domaine temporelle**).



On distingue deux régimes :

- **Le régime transitoire** décrit la phase d'évolution où les grandeurs du système varient avant d'atteindre la stabilité.
- **Le régime permanent** correspond à l'état stable atteint après dissipation du transitoire.

Application aux systèmes du premier ordre.

1- Définition d'un système du premier ordre

On appelle système du premier ordre, tout système régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants : $\tau \frac{d\,s(t)}{d\,t} + s(t) = K.e(t)$

Avec :

- **K :** le gain statique définit par $K = \frac{S(+\infty)}{E}$
- **τ :** la constante de temps (en seconds, minute ou heure).

2- Fonction de transfert.

- La fonction de transfert est définie par : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$
- Appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle :

$$\tau.p.S(p) + S(p) = K.E(p) \quad \Rightarrow \quad S(p)\,(1 + \tau.p) = K.E(p)$$

Donc, la fonction de transfert d'un système 1ère ordre : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau.p}$

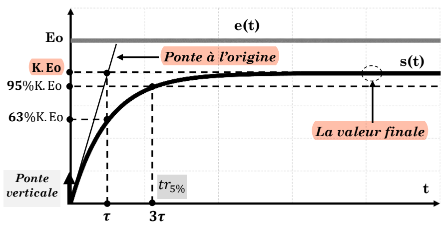
3- Réponse indicielle.

C'est la réponse à un échelon $e(t) = Eo.u(t)$ dont la transformée de Laplace est $E(p) = \frac{Eo}{p}$.

❖ $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ ⇒ Donc la réponse indicielle est : $S(p) = H(p).E(p)$

D'où : $S(p) = \frac{Eo}{p}\,\frac{K}{1 + \tau.p}$ ⇨ $s(t) = K.E_o\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Le comportement transitoire d'un système de premier ordre se décrit ainsi :



Les points remarquables :

- ✓ La valeur initiale : $S_i = 0$
- ✓ La valeur finale : $S_f = K.E$
- ✓ $s(t) = 63\%\ S_f$ lorsque $t = \tau$
- ✓ $s(t) = 95\%\ S_f$ lorsque $t = 3\tau$

4- Temps de réponse à 5%

Le temps de réponse d'un système est le temps mis par la sortie du système pour entrer dans la bande compris entre **95%** et **105%** de sa valeur finale.

- Pour un système 1er Ordre (s(t) ne dépasse pas la valeur finale S_f) :

$$s(tr_{5\%}) = 95\%\ K.Eo \Leftrightarrow K.E_o\left(1 - e^{-\frac{tr_{5\%}}{\tau}}\right) = 0.95\,K.Eo \quad \Rightarrow \quad tr_{5\%} = 3.\tau$$

Conclusion :

Le système de 1er ordre, caractérisé par sa réponse indicielle, présente :

- Une réponse transitoire exponentielle sans dépassement (D = 0%).
- Un démarrage à zéro avec une montée verticale (pente verticale à 0^+).
- Un temps de réponse à 5% estimé à $tr_{(5\%)} = 3\cdot\tau$.
- Une valeur finale donnée par $S_f = K\cdot E_0$.

Application aux systèmes du deuxième ordre

1- Définition d'un système du deuxième ordre

On appelle système du deuxième ordre, tout système régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\,m}{\omega_n}\frac{d\,s(t)}{d\,t} + s(t) = K.e(t)$$

Avec :

- **K :** le gain statique définit par $K = \frac{S(+\infty)}{E}$
- ω_n : la pulsation propre du système (rad/s)
- m : facteur ou coefficient d'amortissement, parfois noté z ou ξ

2- Fonction de transfert.

- La fonction de transfert est définie par : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$
- Appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_n^2}p^2 S(p) + \frac{2\,m}{\omega_n}p\,S(p) + S(p) = K.E(p) \Rightarrow S(p)\left(\frac{1}{\omega_n^2}p^2 + \frac{2\,m}{\omega_n}p + 1\right) = K.E(p)$$

Donc, la fonction de transfert d'un système $2^{ème}$ ordre :

➲ **Forme 1 :** $H(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}p^2 + \frac{2\,m}{\omega_n}p + 1}$

➲ **Forme 2 :** $H(p) = \frac{K\,\omega_n^2}{p^2 + 2\,m.\,\omega_n\,p + \omega_n^2}$

3 - Etude de la réponse transitoire : Réponse indicielle

➲ **Problématique :** Le tracé du comportement transitoire de la réponse indicielle devient plus complexe, car il dépend désormais principalement du coefficient d'amortissement m.

➲ **Solution :** *simplification de la fonction de transfert H(p) selon la valeur m.*

Prenons le dénominateur : $D(p) = \frac{1}{\omega_n^2}\,p^2 + \frac{2\,m}{\omega_n}p + 1$

On pose x = p et résoudre : $D(x) = 0$ ⇒ on trouve : $\Delta = \frac{4}{\omega_n^2}(m^2 - 1)$

On distingue donc trois cas selon la valeur de m : $m > 1$, $m = 1$ et $m < 1$.

❖ Cas 1 : Réponse apériodique (ou sur-amortie) : m > 1

D(p) = 0 dispose deux racines réelles tel que : $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$

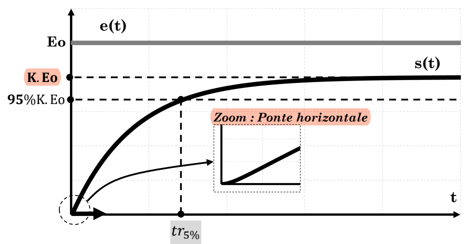
Avec : $\omega_1 = \omega_n\left(m - \sqrt{m^2 - 1}\right)$ et $\omega_2 = \omega_n\left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)$.

➲ La fonction de transfert est alors s'écrit :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = K.H1(p).H2(p)$$

Les fonctions H1 et H2 sont deux fonctions de 1er ordre de pulsation de coupure ω_1 et ω_2. La réponse indicielle est la suivante :

- L'entrée : $e(t) = Eo.u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{Eo}{p}$
- Donc : $S(p) = H(p).E(p) \Rightarrow S(p) = \frac{Eo}{p}\,\frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$



Conclusion :

Le système de 2ème ordre pour ($m > 1$), caractérisé par sa réponse indicielle, présente

- Réponse transitoire exponentielle, sans oscillation ni dépassement (D = 0).
- Démarrage à zéro avec une pente horizontale.
- Valeur finale : $S_f = K \cdot Eo$.

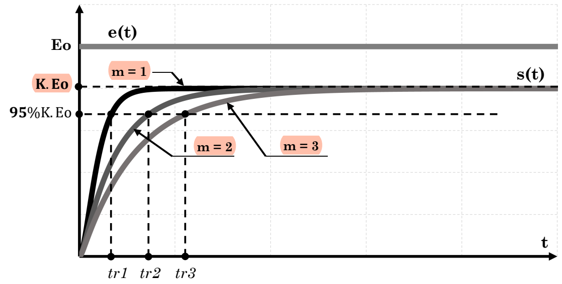
❖ Cas 2 : Réponse critique (ou amortissement critique) : m = 1

D(p) = 0 dispose deux racines réelles double tel que : $\omega_c = \frac{1}{\tau_c}$ **Avec :** $\omega_1 = \omega_n . m$

➲ La fonction de transfert est alors s'écrit : $\mathbf{H(p)} = \frac{K}{(1+\tau p)^2}$

La réponse indicielle est la suivante :

- L'entrée : $e(t) = Eo.u(t) \Rightarrow \mathbf{E(p)} = \frac{Eo}{p}$
- Donc : $S(p) = H(p).E(p) \Rightarrow \mathbf{S(p)} = \frac{Eo}{p} \frac{K}{(1+\tau p)^2}$



Conclusion :

Le système de 2ème ordre pour ($m = 1$), caractérisé par sa réponse indicielle, présente :

- Réponse transitoire exponentielle, sans oscillation ni dépassement (D = 0).
- Démarrage à zéro avec une pente horizontale.
- Valeur finale : $S_f = K \cdot Eo$.

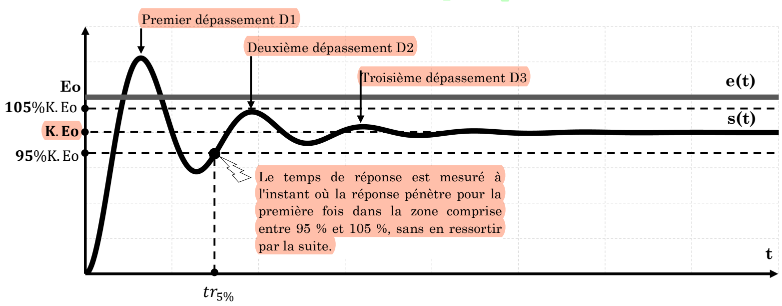
> **Note importante !!! :** *Le temps de réponse* ***minimal sans dépassement*** *est obtenu lorsque le* ***coefficient d'amortissement m = 1****, correspondant à un amortissement critique.*

❖ Cas 3 : Réponse pseudopériodique (ou sous-amortie) : 0 < m < 1

Dans ce cas, les racines sont complexes conjuguées :

$$\omega_1 = \omega_n \left(m - j\sqrt{1-m^2} \right) \text{ et } \omega_2 = \omega_n \left(m + j\sqrt{1-m^2} \right).$$

La réponse indicielle devient : $\mathbf{S(p)} = \frac{E}{P} \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2}$



Conclusion :

Le système de 2ème ordre pour ($m < 1$), caractérisé par sa réponse indicielle, présente :

- La réponse présente des oscillations amorties autour de la valeur finale.
- Un dépassement de la valeur finale peut se produire.
- La vitesse de stabilisation dépend de l'amortissement m et de la pulsation propre ω_n
- Plus m est petit, plus les oscillations sont marquées.
- La valeur finale : $S_f = K \cdot Eo$.

> **Note importante !!! :** *Le temps de réponse* ***minimal avec dépassement*** *est obtenu lorsque le* ***coefficient d'amortissement m = 0.7.***

4 – Temps de réponse à 5 % pour un système de 2ème ordre

➲ **Question :** *Existe-t-il une méthode mathématique permettant de calculer le temps de réponse, comme c'est le cas pour un système du premier ordre ?*

➲ **Réponse : Non**, il n'existe pas de formule simple et générale comme pour le 1er ordre. Pour un système du 2e ordre, on utilise des expressions approximatives selon les cas de m ou bien des abaques pour déterminer le temps de réponse.

Abaques : temps de réponse réduit à 5%

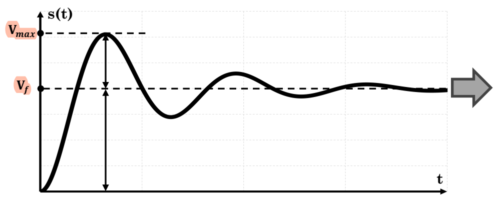
Exemple : si $\omega_n = 5$ rad/s et pour $m = 0.7 \Rightarrow \mathbf{\omega_n . t_{r5\%} = 3} \Rightarrow \mathbf{t_{r5\%} = 0.6\ s}$

Quelque point remarquable :

$m \gg 1$	$m \ll 1$	$m = 0.7$	$m = 1$
$t_{r5\%} = \frac{3}{m.\omega_n}$	$t_{r5\%} = \frac{6.m}{\omega_n}$	$t_{r5\%} = \frac{3}{\omega_n}$	$t_{r5\%} = \frac{4.6}{\omega_n}$

5- Dépassement indiciel

Le dépassement est le phénomène où la réponse d'un système dépasse temporairement sa valeur finale avant de se stabiliser, ce qui se produit lorsque $m < 1$, en lien avec un amortissement insuffisant et des oscillations.

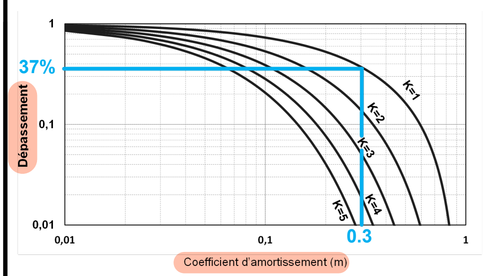


Le dépassement est défini par :

$$\mathbf{D1_{\%}} = \frac{V_{max} - V_f}{V_f} . 100$$

Pour un système de 2ème ordre, le dépassent est calculé en fonction de m par la relation suivante : $\mathbf{D1_{\%} = 100 . e^{K\frac{-\pi . m}{\sqrt{1-m^2}}}}$ avec K le numéro de dépassement.

Abaque de dépassement.



Exemple :

On cherche le premier dépassement (**K = 1**) pour m = 3 :

D'après l'abaque :

⇒ m = 0.7 ⇒ **D1 = 37%**

Pôles dominants et réduction du modèle

1- Pole dominant :

Pour les systèmes d'ordre supérieur à 2, on simplifie l'étude en ne gardant que le pôle dominant, celui qui est le plus lent (c'est-à-dire avec ***la plus grande constante de temps***).

Exemple : $\mathbf{H(p)} = \frac{K}{(1+5p)(1+0.5p)(1+0.1p)}$ dispose de 3 pôles

- $P1 = \frac{1}{5}$
- $P2 = \frac{1}{0.5}$
- $P3 = \frac{1}{0.1}$

Le pôle dominant est : $\mathbf{P1 = \frac{1}{5}}$ (car $\mathbf{5 \gg 0.5}$ *et* $\mathbf{5 \gg 0.1}$)

2 - Réduction de modèle

La réduction de modèle simplifie l'étude des systèmes complexes en ne gardant que les dynamiques les plus influentes sur la réponse.

$$\mathbf{H(p)} \xrightarrow{\textit{Réduction}} \mathbf{Hr(p)} = \frac{K}{1+5p}$$

Ici, le système ***d'ordre 3*** *a été réduit à un système* ***d'ordre 1.***