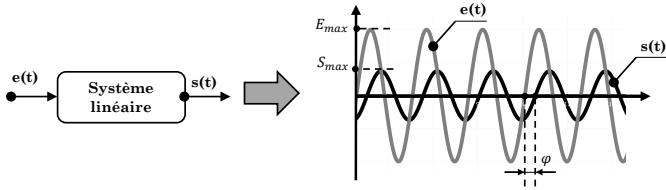


L'analyse fréquentielle des systèmes linéaires permet d'étudier leur comportement selon les fréquences d'entrée. Elle est cruciale pour évaluer la stabilité, améliorer les performances et optimiser les contrôleurs.

C'est quoi l'analyse fréquentielle ?

L'analyse fréquentielle consiste à exciter un système par un signal sinusoïdal d'amplitude constante, tout en faisant varier la fréquence, afin d'observer l'évolution de l'amplitude de sortie et du déphasage entre l'entrée et la sortie en fonction de la fréquence f (ou la pulsation ω).



Notions de Base : fonction de transfert complexe – Bode

1- Fonction de transfert complexe

La fonction transfert H(jω) s'obtient en remplaçant p par jω dans H(p) = S(p)/E(p). L'analyse fréquentielle étudie H(jω) en fonction de la pulsation ω pour caractériser le système.

Exemple : soit $H(p) = \frac{\tau_1 p}{(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\tau_1 j\omega}{(1 + \tau_2 j\omega)(1 + \tau_3 j\omega)}$

2- Module et la phase d'une fonction de transfert complexe.

Soit une fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$, où N(jω) et D(jω) sont respectivement les parties numérateur et dénominateur de la fonction de transfert, exprimées en fonction de la variable complexe jω.

On pose dans le cas général (avec k > n) :

- o $N(j\omega) = (\gamma_1 + j\delta_1)(\gamma_2 + j\delta_2) \dots (\gamma_n + j\delta_n)$
- o $D(j\omega) = (\alpha_1 + j\beta_1)(\alpha_2 + j\beta_2) \dots (\alpha_k + j\beta_k)$

Le module de la fonction de transfert H(jω) : |H(jω)|

On a : $|H(j\omega)| = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|}$

$\Rightarrow |N(j\omega)| = \sqrt{(\gamma_1^2 + \delta_1^2) \cdot (\gamma_2^2 + \delta_2^2) \dots (\gamma_n^2 + \delta_n^2)} = \prod_{i=1}^n \sqrt{(\gamma_i^2 + \delta_i^2)}$
 $\Rightarrow |D(j\omega)| = \sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \cdot (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \dots (\alpha_k^2 + \beta_k^2)} = \prod_{i=1}^k \sqrt{(\alpha_i^2 + \beta_i^2)}$

D'où : $|H(j\omega)| = \frac{\prod_{i=1}^n \sqrt{(\gamma_i^2 + \delta_i^2)}}{\prod_{i=1}^k \sqrt{(\alpha_i^2 + \beta_i^2)}}$

La phase de la fonction de transfert H(jω) : φ(H(jω))

On a : $\varphi(H(j\omega)) = \text{Arg}(H(j\omega)) = \text{Arg}\left(\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}\right) \Leftrightarrow \varphi(H(j\omega)) = \text{Arg}(N(j\omega)) - \text{Arg}(D(j\omega))$

- o $\text{Arg}(N(j\omega)) = \tan^{-1}\left(\frac{\delta_1}{\gamma_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\delta_2}{\gamma_2}\right) + \dots + \tan^{-1}\left(\frac{\delta_n}{\gamma_n}\right) = \sum_{i=1}^n \tan^{-1}\left(\frac{\delta_i}{\gamma_i}\right)$
- o $\text{Arg}(D(j\omega)) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) + \dots + \tan^{-1}\left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right) = \sum_{i=1}^k \tan^{-1}\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right)$

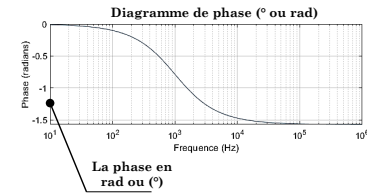
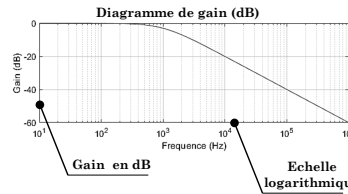
D'où : $\varphi(H(j\omega)) = \sum_{i=1}^n \tan^{-1}\left(\frac{\delta_i}{\gamma_i}\right) - \sum_{i=1}^k \tan^{-1}\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right)$

Exemple : soit $H(j\omega) = \frac{\tau_1 j\omega}{(1 + \tau_2 j\omega)(1 + \tau_3 j\omega)}$

Le module H(jω)	La phase φ(H(jω))
$ H(j\omega) = \frac{\tau_1 \omega}{\sqrt{(1 + (\tau_2 \omega)^2)(1 + (\tau_3 \omega)^2)}}$	$\varphi(H(j\omega)) = 90 - \tan^{-1}(\tau_1 \omega) - \tan^{-1}(\tau_2 \omega)$

3 - Lieux de transfert.

Les lieux de transfert représentent graphiquement la fonction H(jω). On distingue principalement trois types : les diagrammes de Bode, de Nyquist et de Black. On doit concentrer uniquement sur l'analyse dans le plan de Bode.



Question : Comment tracer le diagramme de Bode pour une fonction de transfert complexe ?

Réponse : Deux approches existent :

- 1^{re} méthode : calcul direct du module et de la phase en remplaçant ω par différentes valeurs.
- 2^e méthode (modèle) : simplifie H(jω) et trace Bode par somme logarithmique.

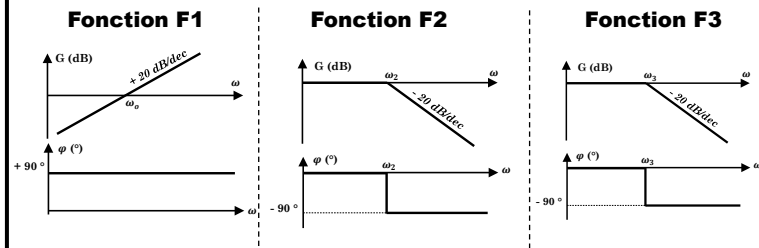
Remarque : la 2^e méthode, très utilisée, est rapide et précise. Pour plus d'information de traçage clic [ici](#).

Exemple : soit $H(j\omega) = \frac{\tau_1 j\omega}{(1 + \tau_2 j\omega)(1 + \tau_3 j\omega)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_1}}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_2})(1 + j \frac{\omega}{\omega_3})}$

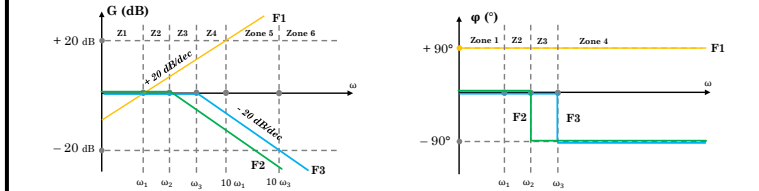
Avec : $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}, \omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$ et $\omega_3 = \frac{1}{\tau_3}$; si $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 \Rightarrow \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$

Donc : $H(j\omega) = \left(j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \times \left(\frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}\right) \times \left(\frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_3}}\right) \Rightarrow H(j\omega) = F1(p) \times F2(p) \times F3(p)$

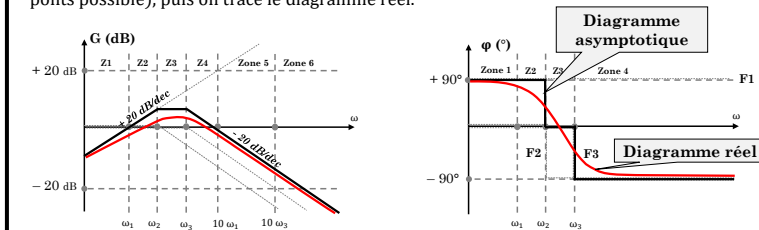
On utilise la méthode de modèle :



On trace individuellement en fonction de leurs propres pulsations de coupure chaque fonction de transfert.



En plan logarithmique, la multiplication des modules devient une somme des logarithmes. On additionne donc les gains et les phases zone par zone (méthode des ponts possible), puis on trace le diagramme réel.



Etude fréquentielle d'un système 1^{er} ordre

On rappelle que la fonction de transfert d'un système du premier est de la forme :

$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$

1- Fonction de transfert complexe.

On remplace p = jω, la fonction de transfert complexe H(jω) : $H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}$

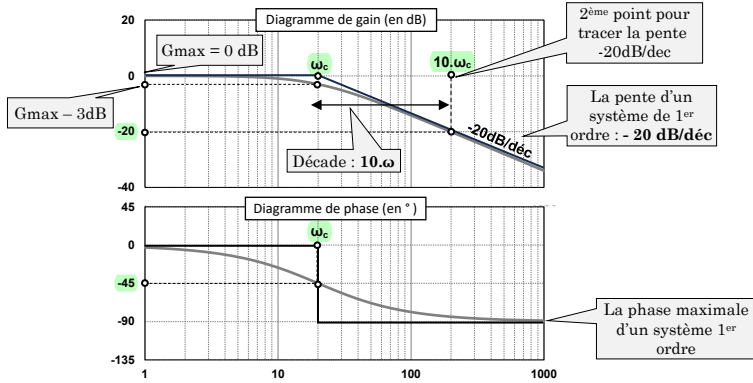
La fonction de transfert H(jω) peut se mettre : $H(j\omega) = \frac{K}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$

Donc :

- o La pulsation de coupure ω_c : $\omega_c = \frac{1}{\tau}$
- o Le module de H(jω) : $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \Rightarrow G = 20 \log(|H(j\omega)|)$
- o La phase φ(jω) : $\varphi(H(j\omega)) = 0 - \tan^{-1}(\tau \omega)$

2- Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode suivant pour $K = 1$ et $\tau = 0.05$, donc $\omega_c = 20$ rad/s.



Conclusion :

- Le gain statique K du système est donné par : $K = 10^{\frac{G_{max}}{20}}$
- La pulsation de coupure correspond :
 - Au point où le gain chute à $G_{max} - 3$ dB
 - Ou encore à la fréquence pour laquelle la phase atteint -45° .
- La pente d'un système du premier ordre est de 20 dB/décade.
- La phase d'un tel système ne dépasse pas -90° .

Étude fréquentielle d'un système du deuxième ordre

On rappelle que la fonction de transfert d'un système de 2ème ordre est de la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

Avec :

- K : le gain statique,
- m : le facteur d'amortissement
- ω_n : la pulsation propre du système (rad/s)

1- Fonction de transfert complexe.

On remplace $p = j\omega$, la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_n} + (j\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

La fonction de transfert $H(j\omega)$ peut se mettre : $H(j\omega) = \frac{K}{(1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2) + j2m\frac{\omega}{\omega_n}}$

Donc :

- Le module de $H(j\omega)$: $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2 + (2m\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$
- La phase $\varphi(j\omega)$: $\varphi(H(j\omega)) = 0 - \tan^{-1}\left(\frac{2m\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}\right)$

2- Diagrammes de Bode d'un système de second ordre

Problématique : Le tracé du diagramme de Bode dépend du facteur d'amortissement m. Selon sa valeur, le modèle est simplifié pour une meilleure lisibilité, puis on applique la méthode du modèle pour le tracer.

Solution : simplification de la fonction de transfert H(p) selon la valeur m.

Prenons le dénominateur : $D(p) = \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 + \frac{2m}{\omega_n} (j\omega) + 1$

On pose $x = j\omega$ et résoudre : $D(x) = 0 \Rightarrow$ on trouve : $\Delta = \frac{4}{\omega_n^2} (m^2 - 1)$

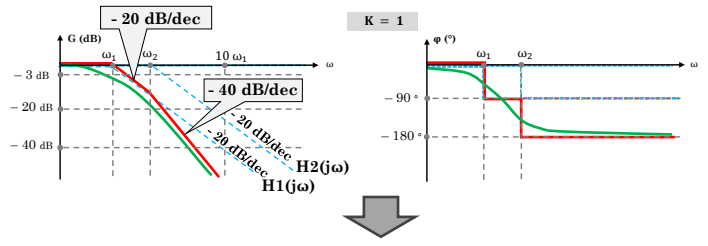
On distingue donc trois cas selon la valeur de m : $m > 1$, $m = 1$ et $m < 1$.

Cas 1 : Réponse aperiodique (ou sur-amortie) : $m > 1$

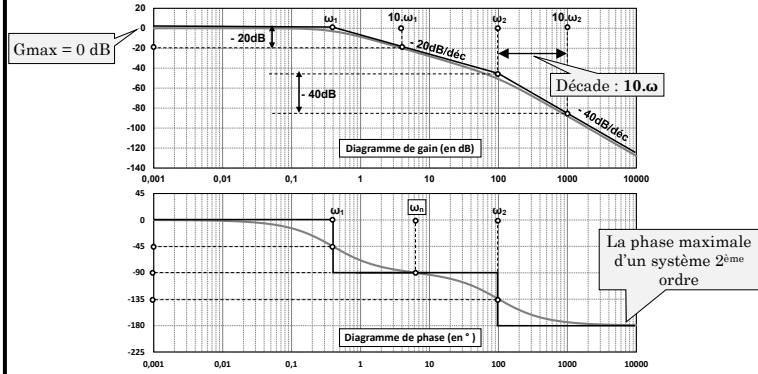
$D(j\omega) = 0$ dispose deux racines réelles tel que : $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$
Avec : $\omega_1 = \omega_n (m - \sqrt{m^2 - 1})$ et $\omega_2 = \omega_n (m + \sqrt{m^2 - 1})$.

La fonction de transfert est alors s'écrit :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega)} = \frac{K}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})} = K.H1(j\omega).H2(j\omega)$$



Simulation d'un système de 2ème ordre avec $K = 1$, $m = 7,94$ et $\omega_n = 6.32$ rad/s
 $\Rightarrow K = 1$, $\omega_1 = 0.4$ rad/s et $\omega_2 = 100$ rad/s



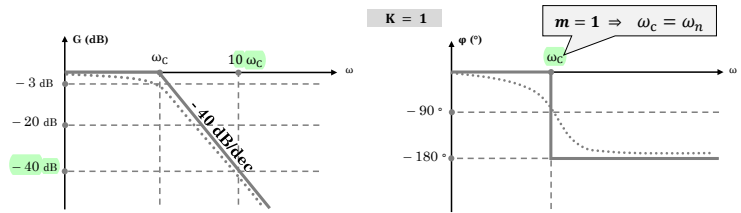
Conclusion :

- Le gain statique K du système est donné par : $K = 10^{\frac{G_{max}}{20}}$
- La pulsation de coupure ω_1 correspond à la pulsation pour laquelle la phase atteint -45° et ω_2 lorsque la phase atteint -135° .
- La pulsation propre ω_n située pour laquelle la phase atteint -90° .
- La pulsation propre ω_n peut être calculer par la relation : $\omega_n = \sqrt{\omega_1 \times \omega_2}$
- La phase d'un tel système ne dépasse pas -180° .

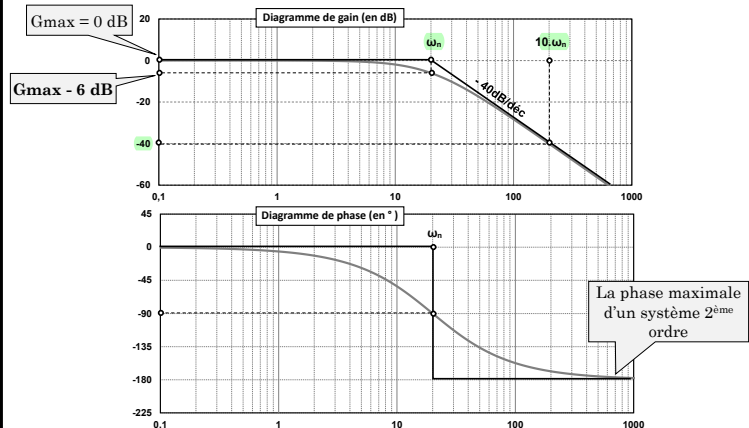
Cas 2 : Réponse critique (amortissement critique) : $m = 1$

$D(p) = 0$ dispose deux racines réelles double tel que : $\omega_c = \frac{1}{\tau_c}$ Avec : $\omega_c = m \cdot \omega_n$

La fonction de transfert est alors s'écrit : $H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega)^2} = \frac{K}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_c})^2}$



Simulation d'un système de 2ème ordre avec $K = 1$, $m = 1$ et $\omega_n = 20$ rad/s



Conclusion :

- Le gain statique K du système est donné par : $K = 10^{\frac{G_{max}}{20}}$
- La pulsation de coupure ω_c correspond à la pulsation pour laquelle la phase atteint -90° où le gain chute à $G_{max} - 6$ dB.
- La pulsation propre ω_n dans ce cas la pulsation de coupure ω_c : $\omega_n = \omega_c$

❖ Cas 3 : Réponse pseudopériodique (ou sous-amortie) : $0 < m < 1$

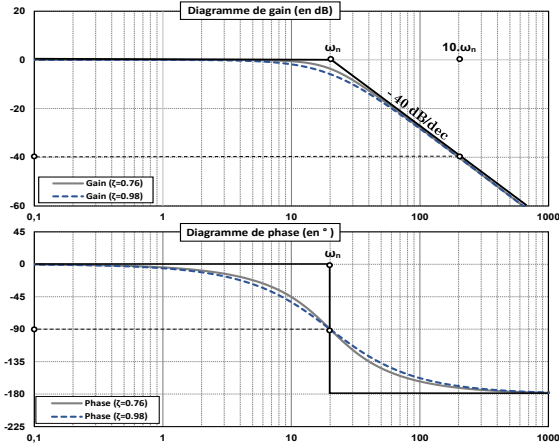
Dans ce cas, les racines sont complexes conjuguées :

$$\omega_1 = \omega_n (m - j\sqrt{1 - m^2}) \text{ et } \omega_2 = \omega_n (m + j\sqrt{1 - m^2}).$$

La fonction de transfert s'écrit : $H(j\omega) = \frac{K}{(1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2) + j2m\frac{\omega}{\omega_n}}$

A- Système sous-amorti sans résonance marquée : $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$

Simulation pour : $K = 1, \omega_n = 20$ et ($m = 0.76, m = 0.98$)



Conclusion :

Lorsque m tend vers 0.7 , le diagramme de Bode montre que la réponse fréquentielle suit mieux les asymptotes : pente de -40 dB/dec .

- La pulsation ω_n est situé lorsque la phase est -90° .
- Le gain statique K du système est donné par : $K = 10^{\frac{G_{max}}{20}}$

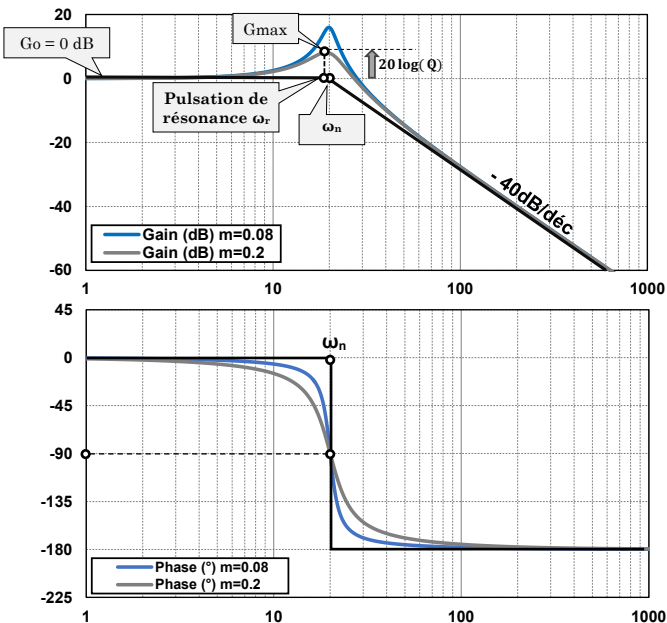
B- Système sous-amorti avec résonance marquée : $0 < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$

C'est quoi la résonance ?

La résonance est un phénomène physique où un système accumule fortement de l'énergie lorsque la fréquence d'une excitation externe est égale ou très proche de sa fréquence propre (appelée fréquence de résonance), provoquant une amplification maximale du signal de sortie.

Note importante : Dans un système du second ordre, le phénomène de résonance apparaît lorsque le facteur d'amortissement m est inférieur à $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$.

Simulation pour : $K = 1, \omega_n = 20$ et ($m = 0.08, m = 0.2$)



Conclusion :

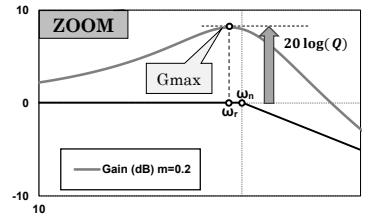
- La pulsation ω_n est situé lorsque la phase est -90° .
- Le gain statique K du système est donné par : $K = 10^{\frac{G_{max}}{20}}$
- Coefficient de surtension Q : $G_{max} = 20 \cdot \log(Q)$

Ce coefficient permet de déterminer le coefficient d'amortissement m :

$$Q = \frac{K}{2m\sqrt{1 - 2m^2}}$$

- La pulsation de résonance ω_r :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2m^2}$$



Remarque :

Lorsque le coefficient d'amortissement m devient très faible (tend vers 0), la pulsation de résonance ω_r se rapproche de la pulsation propre ω_n : $\omega_r \approx \omega_n$.

Pour un système du second ordre, lorsque le facteur d'amortissement m est inférieur à $0,707$, le système présente un pic de résonance. Plus m est petit (c'est-à-dire plus on s'éloigne de $0,707$ vers 0), plus le gain maximal G_{max} augmente. Ce phénomène s'appelle l'amplification en résonance, et il devient particulièrement marqué pour des valeurs très faibles de m .